Math. P.
382
fn

Math. p.
382 m

Ohm

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Kurzes
gründliches und leichtfaßliches
Rechenbuch,

brauchbar in allen

Bürger-, Gewerbs- und Militär-Schulen,

besonders aber

an lateinischen Schulen und Gymnasien.

Nebst einem Anhange

Tabellen zur Vergleichung der Maaße und Gewichte verschiedener Länder und namentlich der Zollvereins-Staaten enthaltend.

von

Dr. Martin Ohm,

Ritter des rothen Adler-Ordens IV. Klasse, ordentl. Professor der Mathematik an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, Lehrer an der Königl. Allgemeinen Kriegs-Schule, wie auch an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin, der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, sowie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften correspondierendem Mitglied.

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage.

Erlangen,
Verlag von Carl Heyder.
1845.

BIBLIOTHECA
427. 85.

Neues

gründliches und leichtfaßliches

Rechenbuch,

brauchbar in allen

Bürger-, Gewerbs- und Militär-Schulen,

besonders aber

an lateinischen Schulen und Gymnasien.

Nebst einem Anhange

Tabellen zur Vergleichung der Maaße und Gewichte verschiedener Länder und namentlich der Zollvereins-Staaten enthaltend.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Dr. Martin Ohm

Ritter des rothen Adler-Ordens IV. [illegible] der Mathematik an der König. Friedrich-Wilhelms-Universität, Lehrer an der Königl. Allgemeinen Kriegs-Schule, wie auch an der Königl. [illegible] und Ingenieur-Schule zu Berlin, der Kaiserl. Russischen Akademie [illegible] zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der [illegible], sowie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften [illegible] Mitgliede.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage.

Erlangen,
Verlag von Carl Heyder.
1845.

Vorrede.

Der Verfasser ist noch jetzt, wie bei dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Rechenbuches, davon überzeugt:

1) daß man in allen Schulen den Rechen-Unterricht so einfach wie möglich, ohne alle gelehrten Zuthaten, also namentlich ohne Zuziehung einer sogenannten Lehre der Proportionen geben müsse, und daß dies namentlich in lateinischen Schulen und Gymnasien keine Ausnahme erleiden dürfe;

2) daß dieser einfache Rechen-Unterricht doch in sich ein zusammenhängendes, der Fassungskraft des Alters zugängliches Ganzes, eine Einheit bilden müsse, innerhalb welcher der Schüler über seine einzelnen und einfachen Arbeiten sich überall ausreichende, (wenn auch nicht gerade der strengen Wissenschaft allemal genügende) Rechenschaft geben könne;

3) daß man an denjenigen Schulen, in denen (gleichzeitig oder) später auch noch mathematischer Unterricht ertheilt wird, die Rechenkunst von dem mathematischen Unterricht sorgfältigst getrennt halten müsse, und namentlich nicht praktisches Rechnen für Mathematik ausgeben dürfe, da beide einander ganz entgegengesetzte Zwecke haben. Denn das praktische Rechnen soll den Menschen für gewisse Bedürfnisse abrichten, die Mathematik will dagegen denselben über Zahl und Größe zum innern Bewußtseyn bringen. Wird diese letztere Stellung aufgegeben, so treibt man keine Mathematik mehr.

Das gegenwärtige Rechenbuch hat sich also zum Zweck gesetzt, ohne Zuziehung mathematischer Kenntnisse, in steter Rücksicht auf den Zweck des Rechnens, aber anregend, belehrend, überzeugend alles Wichtige und Nothwendige vom Rechnen beizubringen. Es befolgt dabei die Ordnung:

Nachdem die 5 Species (Numeriren, Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren) mit ganzen Zahlen tüchtig eingeübt sind, und der Lehrer Sorge getragen hat (durch oft wiederholtes Fragen), daß der Schüler über das, was diese Operationen leisten (bezwecken) gehörig im Klaren ist, — folgt ein Vortrag über Brüche, wie er dem Alter der Lernenden angemessen ist, so daß die Schüler eine möglichst annehmbare Ansicht derselben bekommen*). Sind nun die 4 Species mit den Brüchen und den gemischten Zahlen abermals sehr gut eingeübt, so wird zum Reduciren der benannten Zahlen geschritten, sowohl auf niedrigere, als auch auf höhere Einheiten, damit ein Zusammenfassen (Addiren) zweier oder mehrerer benannter Zahlen, und ein Hinwegnehmen (Subtrahiren) der einen von der andern, statt finden könne.

Das gemeine Rechnen schließt sich nun mit dreierlei Arten von Aufgaben:

1) Wenn 1 ℔ a Thlr. kostet, was kosten p ℔? — Antwort: a mal p Thlr.

2) Wenn b ℔ q Thlr. kosten, was kostet 1 ℔? — Antwort: $\frac{q}{b}$ Thlr., weil dann b ℔ wieder b mal $\frac{q}{b}$ Thaler, d. h. wieder q Thlr. kosten.

3) Wenn a ℔ b Thlr. kosten, was kosten c ℔? — Antwort: Wenn a ℔ b Thlr. kosten, so kostet 1 ℔ (nach

*) Dabei muß der Lehrer nie versäumen, dem Schüler zu sagen, daß in dem mathematischen Vortrage diese Begriffe viel besser noch (nämlich allgemeiner) gegeben werden müssen, daß aber das Gegenwärtige für den Rechen-Unterricht einstweilen ausreiche.

Nr. 2) $\frac{b}{a}$ Thlr., folglich c ℔ nothwendig c mal $\frac{b}{a}$ Thlr. (nach Nr. 1); d. h. man muß in dem Ansatze

a ℔ kosten b Thlr. was c ℔?

das zweite Glied b durch das erste a dividiren und das, was herauskommt, mit dem dritten Gliede c wieder multipliciren, um das Gesuchte zu erhalten. Weil es aber für das Endresultat einerlei ist, ob man zuerst durch a dividirt, und dann mit c multiplicirt, oder ob man dieselben Operationen in umgekehrter Ordnung statt finden läßt, so folgt, daß man, um die Lösung dieser dritten Aufgabe zu erhalten, auch die beiden mittleren Glieder b und c des Ansatzes mit einander multipliciren und dann das, was herauskommt, durch das erste Glied a dividiren dürfe; und dies Verfahren ist die sogenannte Regel de tri, zu deren Begründung also durchaus keine sogenannte Proportionenlehre erforderlich ist.

Dem schon völlig geübten Schüler bei jeder zusammengesetzteren Aufgabe, die man noch auf dem Wege des gemeinen Rechnens lösen kann, nachzuweisen, wie sich solche in Regula de tri Aufgaben zerlegen läßt, und welche Glieder daher in das Multiplikations-, welche in das Divisions-Fach gestellt werden müssen, und wie die Abkürzungen eintreten können und müssen, dies ist die letzte Arbeit des Rechenlehrers, der noch die Pflicht auf sich hat, in der Anordnung dieser Lehren, nach dem Alter und der Fassungskraft seiner Schüler, etwas zu wechseln. So z. B. dürfte es für die meisten Rechenschüler nothwendig werden, nach den 5 Species mit unbenannten ganzen Zahlen, soviel solche auch schon eingeübt seyn mögen, nicht sogleich die Brüche folgen, sondern erst eine längere Zeit hindurch mit benannten Zahlen rechnen zu lassen, selbst Regula de tri Aufgaben, aber lauter Beispiele, die nicht zu Brüchen führen.

Endlich vergesse man nie, daß das gemeine Rechnen eine Kunst, d. h. etwas ist, was man nur durch sehr lange unermüdet fortgesetzte Uebung sich aneignen kann. Wer die

größtmöglichste Menge von Beispielen durchgerechnet hat, der kann eher auf Fertigkeit und Tüchtigkeit im Rechnen Anspruch machen, als der, welcher das Ueben vernachläßigt, wenn derselbe auch sonst der fähigste Kopf seyn sollte.

Wie hinter oder neben diesem Rechnen der mathematische und namentlich der arithmetische (d. h. analytische) Unterricht getrieben werden könne, ist aus den mathematischen Lesebüchern des Verfassers zu ersehen.

Berlin im November 1844.

M. Ohm.

Einleitung.

Von dem Numeriren.

§. 1.

Die ersten Zahlen spricht man durch die Worte: Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn, aus.

Zu 1. Diese Benennungen müssen dem Schüler zu allererst recht eingeprägt werden. Der Lehrer muß zu dem Ende recht sichtbare Punkte oder Striche an die Schultafel hinmachen, zuerst einen, dann unter diesen zweie, unter diese hernach dreie u. s. w., bis zuletzt eine Reihe von zehn Punkten kommt. Nun weist der Lehrer von der ersten bis zur letzten, und rückwärts von der letzten bis zur ersten in der Ordnung auf jede Reihe hin und läßt sich jedesmal das Wort für diese Zahl angeben. Zuletzt fragt er auch außer der Ordnung, immer auf eine Reihe hindeutend.

Nach dieser Uebung folgt eine zweite, höchst nöthige, daher nie zu vernachlässigende. Man muß sich nämlich alle mögliche Zusammensetzungen einer jeden dieser zehn Zahlen aus zwei anderen angeben lassen, und diese Uebung so lange fortsetzen, bis die Schüler diese Zusammensetzungen mit Bestimmtheit und Fertigkeit bewerkstelligen. Als Hülfsmittel macht man z. B. acht Punkte mehrmal untereinander, theilt sie in jeder Reihe durch einen Strich immer in andere zwei Theile, und läßt sich nun, auf jede Reihe hinweisend, die beiden Zahlen angeben, aus denen die Zahl acht zusammengesetzt ist. Dasselbe thut man denn auch bei allen andern Zahlen bis Zehn, geht aber nie über zehn hinaus. Man

hüte sich auch, bei dieser und bei den Uebungen des folgenden §. 2 Ziffern zu gebrauchen.

§. 2.

Um die ganze Masse der Zahlen einigermaßen übersehen zu können, theilt man sie in Klassen oder Ordnungen. Damit diese dann ausgesprochen werden mögen, hat man für jede solche Klasse oder Ordnung ein eignes Wort angenommen. Zehn Einer nennt man ein Zehend; zehn Zehende ein Hundert; für zehn Hunderte hat man das Wort Tausend; für zehn solche Tausende das Wort Zehntausend; für zehn solche Zehntausende das Wort Hunderttausend; zehn solcher Hunderttausender nennt man eine Million u. s. w. f.; und eine Zahl heißt gezählt oder bekannt, wenn man untersucht hat, wieviel von jeder dieser Ordnungen, d. h. wieviel Einer, wieviel Zehende, wieviel Hunderte u. s. w. sie enthält.

Zu 2. Der Lehrer zeichne an die Schultafel mehrere Fächer neben einander und sage: Hier in dieses Fach lege ich einen Groschen, diesen nennt man einen Einer; in das zweite Fach hier lege ich zehn solche einzelne Groschen, und diese Zahl nenne ich ein Zehend, dann nehme ich zehn solche Zehende, schiebe sie zusammen in einen Haufen, lege diesen in das dritte Fach und nenne ihn ein Hundert; ferner nehme ich gerade so zehn solche Haufen, d. h. solche Hunderte, zusammen in das folgende vierte Fach und nenne diesen Haufen einen Tausender; zehn solche Haufen (Tausender) lege ich in das fünfte Fach, und setze dafür das Wort Zehntausend, zehn solche Zehntausender zusammen in's sechste Fach gelegt, nennt man einen Hunderttausender u. s. w. (Dabei schreibe man immer in jedes Fach das Wort, welches man für den in selbigem liegenden Haufen Groschen gesetzt hat, weise auch jedesmal auf das Fach, von welchem man spricht, mit dem Lineal oder dem Finger genau hin. Die Reihe der Fächer wird dann so aussehen:

7	6	5	4	3	2	1
Million.	Hunderttausend.	Zehntausend.	Tausend.	Hundert.	Zehend.	Einer.

indem man später, wenn von Ziffern die Rede ist, diese sogleich gebraucht, um damit die Stelle der Fächer zu bezeichnen, zu welchem Ende man sie, wie hier geschehen, oben hin gerade über die Fächer schreibt. Diese Zeichnung muß bei dem folgenden immer an der Tafel stehen bleiben). Der Lehrer fahre fort: Hat man nun einen Sack voll Groschen und will man sie einigermaßen übersehen, so mache man so viele Haufen, immer zehn Groschen in einem Haufen, bis nur noch einige (z. B. sechs) einzelne Groschen übrig bleiben. Dann schiebe man immer zehn solche Haufen (Zehende) in einen großen, des dritten Faches, zusammen, und bilde so viele solche neue Haufen (Hunderte), bis zuletzt nur noch einige Zehende (z. B. achte) übrig bleiben. Eben so schiebe man nun wieder auf's neue immer zehn solche große Haufen, wie wir sie so eben erhalten haben, und wie einer im dritten Fache liegt, in einen neuen (solchen des vierten Faches) zusammen, so lange bis nur noch einige z. B. vier einzelne übrig bleiben, die keinen solchen neuen Haufen mehr geben. So fahre man fort, bis man so wenig der größten Haufen erhält (nämlich weniger als zehn), daß daraus kein neuer Haufe des folgenden Faches mehr gemacht werden kann. Gesetzt nun, man hätte neun Haufen des fünften Faches erhalten, und außerdem noch zwei Haufen des vierten Faches, vier Haufen des dritten Faches, acht Haufen des zweiten Faches, und noch sechs einzelne Groschen, wie einer im ersten Fache liegt, so kann man diese Zahl unmittelbar aussprechen, weil man für jeden Haufen in jedem Fache ein eigenes Wort hat; sie heißt nämlich: „Neun mal" Zehntausend, zwei „Tausend, vier Hundert, acht Zehend und sechs." Man glaubt nun die Zahl der Groschen, die in dem Sacke war, zu kennen; eigentlich aber hat man sie bloß auf die obige Art geordnet und weiß nicht viel mehr von ihr als vorher auch. Nur einen einzigen, aber freilich sehr großen Vortheil, hat man durch dieses Ordnen erreicht; daß man nämlich diese Zahl mit einer eben so geordneten Zahl vergleichen kann, wissen kann, welches die größere und welches die kleinere ist.

Hat der Lehrer dieses anschaulich genug gemacht, so frage er die Schüler: Was ist Tausend? Antw. Eine Zahl,

die aus zehn Hunderten besteht. Was ist Hundert? Antw. Eine Zahl, die zehn Zehende hat. Was ist Hunderttausend? Antw. Eine Zahl, die zehn Zehntausende enthält u. s. w. Endlich gebe er ihnen mehrere auf obige Art gezählte Zahlen, z. B. eine Zahl, welche bei dem Zählen drei Zahlen des vierten Faches, zwei vom dritten Fache, fünfe vom zweiten Fache, und drei einzelne des ersten Faches gab, und lasse sie aussprechen, so lange bis sie hierin sich hinlängliche Fertigkeit erworben haben. Bei allen diesen Uebungen unterlasse der Lehrer ja nie, so oft irgend ein Fach genannt wird, deutlich darauf an der Tafel hinzuweisen.

§. 3.

Dem zu Folge ist nichts leichter, als eine gegebene Zahl zu zählen, und wenn sie gezählt ist, durch Worte auszusprechen, und in denselben Worten niederzuschreiben. Da aber das Hinschreiben der Worte so weitläufig, daher unbequem ist, so gebraucht man beim Niederschreiben der Zahlen statt der langen Worte lieber kürzere Zeichen, nämlich statt der Worte:

Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun lieber die kürzern Zeichen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

so wie auch das Zeichen 0 statt des Wortes Null, wodurch angezeigt wird, daß keine Zahl da ist. Diese Zeichen nennt man Ziffern.

Zu 3. Auch diese Ziffern muß der Lehrer wohl einzuprägen suchen, daß er solche hinschreibt, erst in der Ordnung vor und rückwärts gehend, dann auch außer der Ordnung auf selbige hindeutet, und sich von den Schülern den Namen der Zahl sagen läßt, die durch die Ziffer bezeichnet wird. Umgekehrt aber muß er auch die Schüler einzeln aufrufen, ihnen Zahlen ansagen, und dafür die Ziffern hinschreiben lassen. Es versteht sich, daß hier von keiner Zahl die Rede ist, die über Neun hinausgeht.

§. 4.

Man ist übereingekommen, die Menge der Einer, Zehende, Hunderte, Tausende u. s. w., die eine Zahl enthält,

dadurch zu bezeichnen, daß man die Ziffern neben einander hinschreibt, und zwar die Ziffer der Zehende in die zweite Stelle, der Hunderte in die dritte, der Tausende in die vierte Stelle u. s. w., von der rechten zur linken zu gehend, so daß man nur immer ansehen darf, in der wievielten Stelle eine Ziffer z. B. 7 steht, um zu wissen, ob sie sieben Einer, oder sieben Zehende, sieben Hundert, oder sieben Tausend u. s. w. bezeichne Vermöge dieser Uebereinkunft kann man jede durch Worte ausgedrückte Zahl in Ziffern niederschreiben, aber auch umgekehrt jede in Ziffern geschriebene Zahl wiederum durch Worte ausdrücken, oder wie es gewöhnlich heißt, jede Zahl schreiben und auch jede Zahl lesen. Somit ist das Numeriren beendigt.

Zu 4. Hätte man bei Zählung eines Haufens Rechenpfennige auf obige Weise gefunden, daß selbiger sieben Tausend, sechs Hundert, drei Zehend und vier einzelne enthält, und man wollte bloß die Ziffer 7 hinschreiben, so wüßte man ja nicht, ob sie 7 Einer oder 7 Zehende, 7 Hunderte oder 7 Tausende u. s. w. bezeichnet; um daher dieses bestimmt auszudrücken, schreibt man die Ziffern so neben einander, wie ihre Fächer, auf die sie sich beziehen, neben einander stehen, z. B. in dem vorhergehenden Falle 7634, so daß die 7 in der vierten Stelle (von der rechten zur linken) 7 Haufen des vierten Faches (Tausende), die 6 in der dritten Stelle, 6 Haufen des dritten Faches (Hunderte), die 3 in der zweiten Stelle, 3 Haufen des zweiten Faches (Zehende), und die 4 in der ersten Stelle, 4 Haufen des ersten Faches (einzelne Einer) bezeichnen. Es bezeichnen also

die Ziffer	7	sieben (Einer),
die Ziffern	70	sieben Zehende,
— —	700	sieben Hunderte,
— —	7000	sieben Tausende,
— —	70000	sieben Zehntausende,

u. s. w.

Eben so bedeuten

die Ziffer	1	einen Einer (Eins),
die Ziffern	10	ein Zehend (oder Zehn),
— —	100	ein Hundert (oder Hundert),
— —	1000	ein Tausend (oder Tausend),

die Ziffern 10000 ein Zehntausend (oder Zehntausend),
— — 100000 ein Hunderttausend (oder Hunderttausend),
u. s. w.

Dies gehe der Lehrer auf die Art durch, daß er immer bei 7 und bei jeder 1 fragt, in der wievielten Stelle sie steht, dann, welchen Haufen oder welche Ordnung sie daher bezeichne, endlich, welches Wort man für den Haufen in diesem Fache (Zahl dieser Ordnung) angenommen habe. Ist dies gut eingeübt, so schreibe man eine mehrziffrige Zahl hin, z. B. 8974023 oder 65703 u. dgl., frage, bald auf diese, bald auf jene Ziffer deutend, welche Ordnung der Zahlen sie bedeuten, und wie diese Ordnung benannt werde, und fahre damit so lange fort, bis sonach die Stellen der Zehende, Hunderte, Tausende u. s. w. ganz und völlig geläufig worden sind. — Ist dies Ziel erreicht, so fordere man einen Schüler nach dem andern auf, gebe ihnen zuerst einzelne Zahlen einer Ordnung und lasse sie hinschreiben, d. h. der Ziffer ihre gehörige Stelle durch Nullen geben; dann aber auch eine aus mehreren Zahlen verschiedener Ordnungen zusammengesetzte Zahl, z. B. fünf Hunderttausende, sieben Tausende, vier Zehend und sechs Einer (507046), lasse solche hinschreiben, und übe dieses so lange ein, bis sie im Stande sind, jede in Ziffern geschriebene Zahl durch Worte auszudrücken, und auch jede auf gedachte Art ausgesprochene Zahl in Ziffern zu schreiben.

Ohneracht das Numeriren nur und einzig in dem vorhergehenden besteht, so ist das Geschäft des Lehrers hier noch nicht zu Ende, sondern er muß die Schüler noch auf eine Eigenheit unsrer deutschen Sprache aufmerksam machen, welche einige Zahlwörter zusammenzieht, auch wohl zuweilen in einer andern Ordnung folgen läßt. Er muß ihnen also sagen, daß man

statt zwei Zehend lieber sagt zwanzig
— drei Zehend — — dreißig
— vier Zehend — — vierzig
u. s. w.
— neun Zehend — — neunzig;

ferner, daß man im Aussprechen die Einer den Zehenden lieber voransetzt, z. B. statt „zwanzig und acht“ (28) lieber

sagt „acht und zwanzig"; daß man das Wort „und" ganz wegläßt, wenn nur ein Zehend da ist, also statt „drei und Zehn" bloß sagt „dreizehn", statt „neun und zehn" bloß sagt „neunzehn" u. s w.; endlich, daß man auch statt der beiden Zahlen „ein und zehn" lieber „eilf", statt „zwei und zehn" lieber „zwölf" sagt. — Damit dies haften bleibe, muß man viele zwei- und dreiziffrige Zahlen hinschreiben, sie erst auf dem vorigen Wege, dann aber mit diesen Sprachabänderungen ablesen, und wenn dies keinen Anstand mehr hat, auch zwei- und dreiziffrige Zahlen in den gewöhnlichen Ausdrücken angeben und sie niederschreiben lassen. Nachdem die Schüler hierin die gehörige Fertigkeit erlangt haben, gehe man zu fünf- und sechsziffrigen Zahlen z. B. 897654 über und bemerke, daß

die Ziffer	4	bedeutet	4	einfache	Einer,
— —	5	— —	5	zehnfache	Einer,
— —	6	— —	6	hundertfache	Einer,
— —	7	— —	7	einfache	Tausend,
— —	9	— —	9	zehnfache	Tausend,
— —	8	— —	8	hundertfache	Tausend,

daß also die folgenden drei Ziffern 897 in Bezug auf Tausende eben das sind, was die ersten drei 654 in Bezug auf Einer waren. Deswegen spricht man diese folgende Ziffern 897 gerade so aus als ob es Einer wären, setzt aber das Wort „Tausend" noch hinzu; obige Zahl 897654 wird also gelesen: Acht Hundert sieben und neunzig Tausend, sechs Hundert vier und funfzig.

Für das Zahlenlesen hat man daher die praktische Regel: Man schneide von der rechten zur linken drei Ziffern ab, lese nun die übrigen zur linken, wie wenn es eine gewöhnliche ein-, zwei- oder dreiziffrige Zahl wäre, setze aber das Wort „Tausend" bei, dann lese man noch die drei ersten abgeschnittenen Ziffern hinzu.

Für das Zahlenschreiben folgt umgekehrt diese zweite praktische Regel: Man schreibe die Zahl der Tausende, so wie sie angegeben wird, hin, ohne sich weiter zu bedenken, da selbige nur ein-, zwei- oder dreiziffrig seyn kann; zur rechten mache man sich drei Punkte, und fülle dann diese Punkte mit der übrigen gegebenen Zahl dergestalt aus, daß statt der

drei Punkte jedesmal drei Ziffern zu stehen kommen. Die Punkte kann man auch ganz weglassen, wenn man ohne selbige nicht vergißt, daß zur rechten der hingeschriebenen Zahl der Tausende allemal noch drei Ziffern kommen müssen, weil sonst die vorhergehenden nicht Tausende wären.

Für den Lehrer ist insbesondere noch zu merken:

1) Man braucht für's erste nie über sechsziffrige Zahlen hinaus zu gehen, da der Schüler später ohne weitere Anweisung auch jede mehr als sechsziffrige Zahl wird schreiben und lesen können, wenn man ihm nur sagt, daß die 1 in der 7ten Stelle Million, in der 13ten Stelle, Billion, in der 19ten Stelle, Trillion u. s. w. heißt.

2) Man gehe aber nie eher von einer Uebung zur andern, bevor die Schüler die erstere nicht völlig gefaßt und große Fertigkeit darin erlangt haben.

3) In den Fällen, wo Zahlen an die Tafel hingeschrieben sind und abgelesen werden sollen, fordre man bald diesen, bald jenen, vorzüglich die schwächern auf, um die Aufmerksamkeit aller in Thätigkeit zu erhalten.

4) In den Fällen aber, wo Zahlen geschrieben werden sollen, und wo also nur einer an die Schultafel schreiben kann, da müssen die andern alle dieselbe Zahl immer zugleich auf Papier oder auf ihre Rechentafel schreiben; von diesen sieht man einzelne an, dann aber fordert man alle auf, ihre Zahl nach der an der Tafel stehenden richtig geschriebenen zu verbessern.

5) Die beiden letztern praktischen Regeln lasse man an sehr vielen Beispielen besonders gut einüben.

Anmerk. Diese Art der Anordnung der Zahlen nennt man ein Zahlensystem, dessen Natur auf die vorhergehende Weise den Schülern am ersten anschaulich werden wird. Will man, so kann man ihnen dann auch sehr einleuchtend zeigen, daß man eben so gut das Fach am weitesten zur linken für das erste hätte nehmen, daß man also auch die Ziffern von der linken zur rechten zu aufsteigend hätte ordnen können. Eben so anschaulich kann auch jetzt gezeigt werden, daß es nicht nothwendig war, gerade die ersten zehn Zahlen mit eignen Worten zu benennen und immer zehn Haufen des einen Faches in das nächst folgende Fach zu legen. Denn

da es nur um ein Ordnen der Zahlenmasse zu thun war, so hätte man diesen Zweck natürlich auch erreicht, wenn man z. B. acht Einer in das zweite Fach, acht solche in das dritte, acht solche dritte in das vierte, acht solche vierte in das fünfte u. s. w. gelegt hätte. Für jeden Haufen hätte man ein Wort angenommen, und man würde nun eben so jede Zahl zählen, d. h. nach diesen Haufen eintheilen, und wenn dieses geschehen, auch aussprechen können. Von den Ziffern hätte man dann nur diese 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gebraucht, und eine 1 in der zweiten Stelle, nämlich 10 würde einen Haufen des zweiten Faches, nämlich einen Achter bezeichnen; eben so würde 100, einen Haufen des zweiten Faches (Acht Achter) und 1000 einen Haufen des dritten Faches u. s. w. vorstellen. Unser System, in welchem die Zahlen immer zehn-weise geordnet sind, nennt man deswegen das Dekadische oder Decimalsystem, und da es schon seit so langer Zeit in allen Fällen gebraucht wurde, besonders aber da die Sprache sich danach gebildet hat, so ist es wohl beinahe unmöglich, daß je ein anderes an dessen Stelle eingeführt werden könne.

Kapitel I.

Vom Addiren und Subtrahiren.

§. 5.

Wenn zwei oder mehr gegebene Zahlen, z. B. 17, 9 und 24 in eine einzige zusammen genommen werden sollen; so gebraucht man, um dieses anzudeuten, das Wort addiren, man sagt, die gegebenen Zahlen werden addirt; die Zahl die herauskommt (hier 50) heißt die Summe, die einzelnen Zahlen 17, 9 und 24 heißen die Summanden dieser Summe. Um bei dem Niederschreiben weniger Mühe zu haben, gebraucht man auch statt des Wortes „addiren" das kürzere Zeichen +, nennt dieses das Additionszeichen, spricht es aus durch plus oder und, und schreibt 17 + 9 + 24 statt zu schreiben, „die Zahlen 17, 9 und 24 sollen zu einander addirt werden." Will man ausdrücken, daß die Zahl 50

herauskommt, so schreibt man blos 17 + 9 + 24 = 50 und nennt das Zeichen = das Zeichen der Gleichheit oder Gleichheitszeichen. *)

§. 6.

Wenn zwei einziffrige Zahlen addirt werden sollen, so sind zwei Fälle möglich, entweder 1) sie machen zusammen weniger als zehn, z. B. die beiden Zahlen 4 und 3, oder 2) doch weniger als neunzehn aus; z. B. die beiden Zahlen 7 und 8. Im ersten Falle weiß man die Summe unmittelbar aus der Vorübung (§. 1), weil man dort alle Zahlen bis zehn auf alle mögliche Arten in zwei Theile zertheilt hat, und man sogleich weiß, daß 7 aus den beiden Theilen 4 und 3 besteht, daß also umgekehrt 4 und 3 addirt 7 geben müssen. In dem zweiten Falle (wo nämlich 8 und 7 addirt werden sollen), weiß man aus derselben Vorübung (§. 1), daß der Zahl 7 noch 3 fehlen, um ein Zehend zu geben, und daß die andere Zahl 8 aus 3 und 5 besteht, daß also 7 und 8 addirt 1 Zehend und 5 Einer, d. h. geschrieben 15 geben. Man kann also in jedem Falle vermöge der Vorübung (§. 1) sogleich zwei einziffrige Zahlen addiren.

Zu 6. Man lasse die Schüler so lange zwei einziffrige Zahlen addiren, bis sie die Summe jedesmal sehr schnell und mit Bestimmtheit angeben können; nur dann erst und nicht eher gehe man weiter. — Man kann, wo es nöthig ist, diese Summen zweier einziffriger Zahlen nach einer Tabelle, die dann Eins und Eins genannt wird, auswendig lernen lassen. **)

§. 7.

Soll zu einer zweiziffrigen Zahl, z. B. 36, eine einziffrige (d. h. eine Anzahl Einer) addirt werden, so soll in 36 oder

---

*) Genau genommen ist das bloße Zeichen 17 + 9 + 24 die Summe, d. h. das, woran die Addition erkannt wird, während die Zahl 50, dieser Summe bloß gleich ist.

**) Man sieht übrigens, wie das Addiren zuerst im Hinschreiben der Summe 8 + 7 besteht, daß aber dieses Zeichen nachher in das gleichbedeutende 10 + 5 oder 15 umgeformt wird.

3 Zehend und 6 Einer die Menge der Einer 6 um die gegebene zweite Zahl von Einern vermehrt werden. Hier giebt es daher wieder die beiden Fälle, entweder 1) die Einer zusammen machen weniger als zehn aus, z. B. wenn zu 36 die Zahl 2 addirt werden soll, oder 2) die Einer zusammen machen doch weniger wie neunzehn aus, d. h. 1 Zehend und etwa noch einige Einer, z. B. wenn zu 36 noch 9 addirt werden soll. Im ersten Fall werden die Einer addirt und die Zehner bleiben unverändert; man erhält sogleich die Zahl 38. Im zweiten Falle aber müssen die Zehner um den einen Zehner vermehrt werden und man erhält daher 4 Zehende und 5 Einer oder 45.

Zu 7. Dergleichen Aufgaben, nämlich zu einer zweiziffrigen Zahl eine einziffrige zu addiren, gebe man sehr viele, dringe aber unerläßlich darauf, daß gerade so addirt wird, wie es der §. verlangt; nämlich bei 57 und 6 sagt man 6 und 7 giebt 13, folglich ist 63 die gesuchte Summe; oder bei 29 und 5, 9 und 5 ist 14, folglich 34 die Summe u. s. w. Dabei sind diese Uebungen (§. 6 und §. 7) nur im Kopfe, nicht an der Tafel oder auf dem Papier anzustellen. Nicht eher, als bis die Schüler sehr schnell und fertig jede einziffrige Zahl zu jeder zweiziffrigen addiren können, gehe man weiter.

§. 8.

Sollen endlich zwei oder mehrere beliebige mehrziffrige Zahlen addirt werden, so schreibe man sie dergestalt unter einander, daß die Einer alle untereinander zu stehen kommen, dasselbe dann bei den Zehnern, den Hunderten u. s. w. und mache einen Querstrich. Dann addire man alle Einer zusammen, eben so alle Zehende, dann alle Hunderte u. s. w. Bei den jedesmal herauskommenden Summen sind nun wiederum zwei Fälle möglich, 1) entweder sie machen weniger als zehn, d. h. sind einziffrig, oder 2) sie sind zwei= oder mehrziffrig. Im ersteren Fall schreibe man die Summe immer gerade unter, im zweiten Falle aber nur die Ziffer zur rechten, die zur linken aber zähle man mit zur Summe der folgenden Reihe. — Ist z. B. 4796 + 95023 + 95 + 908065 + 796 + 8403 + 7 + 38 zu finden, so schreibe man

4796
95023
95
908065
796
8403
7
38
1017223

Zu 8. Dies kann auf folgende Art anschaulich gemacht werden. Man nehme zuerst zwei Zahlen, z. B. 437 und 286; sollen diese nun addirt werden, so soll man eigentlich bloß die Haufen, die von jedem einzelnen Fach vorhanden sind, zusammen nehmen, also alle Haufen des ersten Faches 7 und 6; eben so alle Haufen vom zweiten 3 und 8 zusammen u. s. w. Dies der Grund, warum man alle Einer addirt, eben so alle Zehner u. s. w. — Da ferner zehn Haufen von irgend einem Fache, immer einen Haufen des nächstfolgenden höhern Faches ausmachen, so folgt, daß so oft eine zweiziffrige Zahl herauskommt, z. B. 13 oder 11, die Ziffer zur linken immer Haufen des nächsten Faches ausdrückt, daher man diese zu der nächsten Kolonne hinzuzählt, die Ziffer zur rechten aber als die Zahl der Haufen, die noch von diesem Fache vorhanden sind, untersetzt.

Uebrigens muß dieses ganze Geschäft praktisch eingelernt werden. Man nehme dabei meist nur dreiziffrige Zahlen, dagegen immer eine größere und größere Menge von Summanden, so daß zuletzt Reihen von zwei- oder dreiziffrigen Zahlen untereinander zu stehen kommen, welche die Länge eines ganzen Quartblattes einnehmen. Dergleichen Reihen muß der Schüler mit der größten Schnelligkeit addiren lernen, was auf die angeführte Art betrieben, gar keine Schwierigkeit hat. Bei der Addition der verschiedenen Kolonnen lasse man aber nie sprungweise, auch nie so addiren, daß man die Zahl zertheilt und immer erst bis zu einem Zehner zählt, sondern von Zahl zu Zahl in der Ordnung und einzig und allein nach §. 7. Der Sicherheit wegen addirt man jede Kolonne zweimal; einmal von oben herab, dann von unten hinauf.

Man thut wohl, die Ziffer zur linken in der Summe einer Kolonne, die mit zur nächsten Kolonne addirt werden muß, irgend wohin zu schreiben, und sie dann erst zu der andern Kolonne hinzuzunehmen, wann jene schon addirt ist; weil selbst der geübteste Rechner zuweilen unterbrochen werden kann, und dann gewöhnlich die frühere Kolonne auch nochmals durchrechnen muß, um gedachte Zahl wieder zu finden. Man kann sie auch gleich unter die nächste Kolonne setzen, wenn Platz vorhanden ist.

Damit aber der Schüler nicht bloß eine Rechenmaschine werde, so muß man ihn nach Beendigung einer jeden Rechnung auch jedesmal wiederholen lassen, was er hier eigentlich gethan habe. Z. B. wenn er 437 + 286 = 723 gefunden hat, so muß er auf die Frage, was er gefunden habe, antworten: „ich habe gefunden, daß die beiden Zahlen 437 und 286 zusammengenommen die Zahl 723 geben."

Zuletzt gebe man auch Aufgaben wie folgende: 1) Man soll 7 Hunderte und 6 Zehende zusammen addiren; 2) zur Zahl 763 noch 192 Zehende zu addiren; 3) zu 276 Hunderten die Zahl 4778 addiren; u. s. w. Man zeige, daß diese Additionen auf gewöhnliche obige Art verrichtet werden können, wenn man die vorkommenden Zahlen höherer Ordnungen, Hunderte, Zehende u. s. w. so schreibt, wie alle Zahlen geschrieben werden müssen, d. h. so, daß die Hunderte in der dritten, die Zehende in der zweiten Stelle u. s. w. stehen. Die Aufgabe in 1) wird dann folgende: man soll die beiden Zahlen 700 und 60 addiren; und man erhält sogleich

$$\begin{array}{r} 700 \\ 60 \\ \hline 760; \end{array}$$

die Aufgabe in 2) wird folgende: man soll zur Zahl 763 noch die Zahl 1920 addiren, und man erhält

$$\begin{array}{r} 763 \\ 1920 \\ \hline 2683; \end{array}$$

endlich hat man statt der Aufgabe in 3) jetzt diese: zur Zahl 27600 die Zahl 4778 zu addiren, giebt

27600
4778
―――――
32378.

Dann aber lasse man bemerken, daß es nicht nöthig ist, in solchen Fällen die Zahlen erst ordentlich zu schreiben, sondern daß man nur das Numeriren gehörig verstanden haben darf, um sogleich dergleichen Additionen richtig verrichten zu können. So z. B. ist in der Aufgabe 1) nur davon die Rede, eine Zahl zu schreiben, die 7 Hunderte und 6 Zehende hat; die wird aber nach dem Zahlensystem geschrieben, wenn man die 7 in die dritte Stelle, die 6 aber in die zweite schreibt, und man erhält daher sogleich 760. Eben so kann man in 2) die 192 Zehende sogleich die Zahl 763 addiren, wenn man sie nur so unter einander setzt, daß die Zehende unter einander zu stehen kommen, wie hier zu sehen

763
192
―――――
2683;

dasselbe gilt auch für das Beispiel in 3); auch hier darf man die Zahlen, ohne sie gehörig zu schreiben, nur so unter einander setzen, daß die Stellen gleicher Ordnungen unter einander zu stehen kommen, nämlich

267
4778
―――――
31478.

Man gebe mehrere dieser Beispiele, damit die Schüler sich auch hierin Fertigkeit erwerben und nach und nach immer mehr mit dem Zahlensystem vertraut werden mögen.

Endlich lasse man sie vielmal Zahlen (zwei oder mehrere) zusammen addiren, die nicht unter einander geschrieben sind, damit sie auch Fertigkeit im Addiren erhalten, ohne die Form des Untereinanderschreibens beobachten zu müssen.

§. 9.

Wenn zwei Zahlen gegeben sind, z. B. 24 und 15, und die Zahl gesucht werden soll, die zur kleinern 15 addirt, die

größere 24 giebt, so gebraucht man dafür das Wort subtrahiren oder abziehen; man sagt, die Zahl 15 werde von 24 subtrahirt; die Zahl, welche herauskommt (hier 9), heißt Differenz (Unterschied, Rest), die größere Zahl 24, von welcher subtrahirt wird, heißt der Minuend, die andere 15 der Subtrahend dieser Differenz. Bei dem Niederschreiben gebraucht man statt des Wortes „subtrahiren" das kürzere Zeichen (—), nennt dieses das Subtraktionszeichen, spricht es aus durch minus oder weniger, und schreibt bloß 24 — 15, statt zu schreiben, daß 15 von 24 subtrahirt werden solle. Man schreibt auch 24 — 15 = 9. *)

§. 10.

Wenn eine einziffrige Zahl z. B. 6 von einer solchen andern Zahl z. B. 14 subtrahirt werden soll, daß der Rest (Differenz) selbst auch nur einziffrig ist, so geschieht die Subtraktion ohne weiteres mittelst §. 6. Aus der Vorübung dieses §. 6 weiß man nämlich sogleich, daß 6 und 8 zusammen 14 ausmachen, folglich auch zugleich, daß 8 sich ergiebt, wenn man 6 von 14 subtrahirt.

Zu 10. Wieviel ist 19 — 7? 15 — 9? 18 — 8? 17 — 9? 16 — 8? 13 — 7? 8 — 5? 7 — 3? 13 — 5? 17 — 8? 16 — 9? 18 — 9? 15 — 6? 13 — 5? 15 — 8? 12 — 7? 14 — 9? u. dergl. m. Alle diese und ähnliche Fragen müssen die Schüler mit der größten Schnelligkeit und Bestimmtheit beantworten können, ehe man weiter geht.

§. 11.

Soll von einer zweiziffrigen Zahl z. B. 37 eine einziffrige Zahl subtrahirt werden, so daß der Rest (Differenz) selbst wieder zweiziffrig wird, so besteht der Minuend (hier 37) immer aus einer Menge Zehende und noch einer Anzahl Einer; und es finden hier wieder zwei Fälle statt; 1) entweder es ist die Zahl der Einer (7) in dem Minuenden (37) größer als der Subtrahend, z. B. wenn 5 von 37 zu subtrahiren ist, oder der Subtrahend ist größer als diese Zahl der Einer,

*) Genau genommen ist das Zeichen 24 — 15 das, woran die Subtraktion sichtbar ist, und welches daher den Namen der Differenz verdient. Die Zahl 9 ist dieser Differenz bloß gleich.

z. B. wenn 9 von 37 subtrahirt werden soll. Im ersten Fall werden die Einer ohne weiteres subtrahirt, und die Zehner ungeändert gelassen, so daß man sogleich erhält 37 – 5 = 32. Im zweiten Falle aber muß man 1 Zehend zu den Einern hinzunehmen (so daß man sagt, die Zahl 37 besteht aus 2 Zehenden und 17 Einern) und dann die gegebene Zahl (9) von den Einern (17) abziehen. Die Zahl der Zehende ist natürlich dann um eine 1 kleiner; man erhält 37 — 9 = 28.*)

Zu. 11. Was ist 21 — 4? 49 — 7? 56 — 8? 94 — 5? u. s. w. — Man übe die Schüler in solchen Fragen hinlänglich, bevor man zu dem Folgenden übergeht.

§. 12.

Soll von 100, 1000, 10000 u. s. w. eine einziffrige Zahl z. B. 6 subtrahirt werden, so subtrahirt man die Zahl 6 von 10, und setzt dem Reste (4) zur linken so viel Neunen als noch Nullen im Minuenden übrig sind. Man hat sogleich 100 — 6 = 94, 1000 — 6 = 994, 10000 — 6 = 9994, 1000000 — 6 = 999994.

Zu 12. Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann der Lehrer anschaulich machen, indem er vorhin zeigt, daß 100 = 90 + 10 1000 = 990 + 10 u. s. w. ist. Auch gebe er hierüber mehrere Beispiele.

§. 13.

Ist ferner eine einziffrige Zahl z. B. 8 von 104, 1004, 10004, 100004 u. s. w. abzuziehen, so daß die Zahl der Einer im Minuenden kleiner ist als die abzuziehende (der Subtrahend 8), so nimmt man zu der Ziffer des Einers noch ein Zehend, zieht ab, und setzt zu der linken so viele Neune als noch Nullen im Minuenden vorkommen; auf diese Art erhält man sogleich 104 — 8 = 96, 1004 — 8 = 996, 10004 — 8 = 9996, 1000004 — 8 = 999996.

Zu 13. Wird auf dieselbe Art anschaulich gemacht, indem man zeigt, daß 104 = 90 + 14, 1004 = 990 + 14, 10004 = 9990 + 14, 1000004 = 999990 + 14. Was ist 1007 — 9? 100002 — 5? 103 — 8? 100007 — 9? u. s. w.

---

*) Genau genommen besteht das Subtrahiren in dem Hinschreiben der Differenz 37 — 9, welche letztere dann in die gleichbedeutende Summe 20 + 8 oder 28 umgeformt wird.

§. 14.

Sind endlich zwei beliebige mehrziffrige Zahlen gegeben und die kleinere von der größeren abzuziehen, so setze man selbige wie bei dem Addiren (§. 8) unter einander, und es werden dann 3 Fälle statt finden; 1) entweder sind die obenstehenden Ziffern größer als die untergeschriebenen; dann ziehe man jede untere von ihrer obern ab, und setze die Reste jedesmal in derselben Ordnung unter, so hat man die gesuchte Differenz. Z. B. 943865 — 712342 giebt:

943865 Minuend,
712342 Subtrahend,

231523 die gesuchte Differenz.

2) Oder es sind eine oder mehr obenstehende Zahlen kleiner als die unterstehenden, dagegen dieser zur linken nicht Null, so ziehe man wieder die untern von den obenstehenden ab, nehme da, wo die obenstehenden kleiner sind, von der nächsten Ziffer zur linken eine 1, welche 10 Einheiten dieser Ordnung bedeutet, hinzu, vergesse aber nicht bei dem folgenden Abziehen, daß die Ziffern, von denen auf diese Art eine 1 genommen wurde, um diese 1 kleiner sind; z. B. 943865 — 676273 giebt

943865 Minuend,
676273 Subtrahend,

267592 Differenz;

wo gleich bei der zweiten Kolonne die untere Zahl 7 größer ist als die obere 6; man nimmt also eine 1 von der nächsten Ziffer 8; diese 1 mit der 6 in Verbindung giebt 16 und dann 7 abgezogen bleibt 9; die nächste Ziffer 8 bedeutet aber dann nur noch 7; daher 2 abgezogen bleiben noch 5 u. s. w. Oder endlich 3) eine oder einige der obenstehenden Zahlen sind kleiner als die untern, und dabei zur linken einige oder mehrere Nullen, wie z. B. wenn 456273 von 700056 abgezogen werden soll; man erhält

Minuend	700056
Subtrahend	456273
Differenz	243783.

So wie man nämlich zur zweiten Kolonne kommt, findet dieser dritte Fall statt; man kann hier nur von der folgenden 7 eine 1 nehmen, diese 1 bedeutet aber 10000 Einheiten von der Ordnung der Ziffer 5; sie mit 5 in Verbindung giebt 10005 und von dieser Zahl soll nun die unten stehende 7 subtrahirt werden, welches nach §. 13 8 giebt, und noch zur linken so viele 9 als oben Nullen sind; die 8 setzt man herunter und von den Neunen, die zur linken statt der Nullen kommen, zieht man nun noch die folgenden Ziffern 2, 6 und 5 ab, vergißt aber nicht, daß die letzte Ziffer 7 jetzt nur noch 6 ist. Praktisch verfährt man also in diesem dritten Falle auf folgende Art: zu der kleinern obern Zahl 5 nimmt man noch 10 hinzu, giebt 15, und zieht die untere Ziffer 7 davon ab; die Nullen zur linken denkt man sich aber dann mit lauter Neunen ausgefüllt, von denen man die unten stehenden Ziffern subtrahirt; die nächste oben nach den Nullen folgende Ziffer ist endlich um 1 kleiner zu nehmen.

Zu 14. Der Lehrer wird diese 3 Fälle mit Zuziehung der §§. 12 und 13 und der Einleitung auf dieselbe Art anschaulich machen können, wie (§. 8) das Geschäft des Addirens. Daß auch diese Aufgabe als die Hauptaufgabe der Subtraktion durch sehr viele Beispiele eingeübt werden muß, versteht sich von selbst. Zuletzt gebe man auch Beispiele, wo die Zahlen nicht gerade unter einander geschrieben sind, z. B. neben einander stehen; auch solche, wo der Subtrahend oben, der Minuend aber unten steht. Endlich dulde man nicht, daß bei dem so genannten Entlehnen oder Borgen Punkte oder sonstige Zeichen gebraucht werden.

Ist die Klasse zahlreich, so können diese Uebungen der Addition (§. 8) und der Subtraktion, so wie auch der bald folgenden Multiplikation und Division (wenigstens anfänglich) nicht zweckmäßiger angestellt werden, als daß man einen nach dem andern eine Aufgabe an der Schultafel machen läßt, während die übrigen dieselbe Aufgabe auf dem Papier oder auf ihrer Rechentafel machen müssen.

Kapitel II.

Vom Multipliciren und Dividiren.

§. 15.

Wenn eine Zahl 8 mehrmal zu sich addirt werden soll (z. B. 5 mal), gebraucht man für diese eigne Art der Addition das Wort **multipliciren**; man sagt: „die Zahl 8 werde mit der Zahl 5 multiplicirt.“ Was herauskommt heißt das **Produkt**, die erstere Zahl 8 der **Multiplikand** (die Zahl welche multiplicirt wird), die andere 5 der **Multiplikator** dieses Produktes. Statt zu schreiben „die Zahl 8 soll mit 5 multiplicirt werden“ schreibt man auch kürzer $8 \rtimes 5$ oder 8.5, nennt das Zeichen $\rtimes$ oder . das **Multiplikationszeichen** und spricht es aus durch **mal**. Es ist also $8.5 = 8+8+8+8+8$ oder auch $= 40$. *)

§. 16.

So oft zwei einziffrige Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, kann dies nicht anders geschehen, als daß man wirklich die eine Zahl so vielmal zu sich addirt, als die andere Zahl anzeigt, z. B. 7.3 giebt $7+7+7$, d. h. 21. Man muß sich daher alle Produkte zweier einziffrigen Zahlen auf diese Weise durch Addition bilden und dann im Gedächtniß zu behalten suchen. Eine Tabelle, in der diese Produkte alle angegeben sind, nennt man das **Ein mal Eins**. Bei Betrachtung dieses Ein mal Eins findet man, daß es für die einziffrigen Zahlen immer einerlei ist, ob man z. B. die Zahl 8, fünfmal addirt $(8+8+8+8+8)$, oder ob man die Zahl 5 achtmal nimmt $(5+5+5+5+5+5+5+5)$; beides

---

*) Genau genommen erkennt man nicht in der Zahl 40, sondern in dem Zeichen 8.5 die vorhandene Multiplikation. Daher ist unter **Produkt** eigentlich das letztere allein zu verstehen, und die Zahl 40 ist diesem Produkte bloß gleich. Und eben so versteht man, genau genommen, unter dem Worte „Multipliciren“ das bloße Hinschreiben des Produkts 8.7, welches letztere dann erst in die gleichbedeutende Summe $50+6$ oder 56 umgeformt wird.

giebt 40. Dasselbe läßt sich auch bei jeder größern Zahl nachweisen; es ist z. B. auch 24 mal 17 so viel, als 17 mal 24 u. s. w., und aus diesem Grunde verwechselt man öfter die Benennungen „Multiplikand" und „Multiplikator" mit dem gemeinschaftlichen Worte Faktor. So sind also 8 und 5 die beiden Faktoren des Produkts 8.5 oder 40.

Zu 16. Der Lehrer lasse die Produkte zweier einziffrigen Zahlen wirklich durch Addition hervorbringen und nicht gleich, wie dies gewöhnlich zu geschehen pflegt, von dem Ein mal Eins abnehmen, wobei die Schüler sich öfters gar nichts denken, daher auch nicht wissen, was sie eigentlich zu thun haben. Das Ein mal Eins müssen sie übrigens sehr gut im Gedächtniß haben, ehe man weiter in der Multiplikation vorschreitet. Den Satz, daß man den Multiplikanden mit dem Multiplikator verwechseln könne, kann man ihnen auf folgende Art anschaulich machen: Man mache auf der Tafel folgende Zeichnung:

. . . . .

. . . . .

. . . . .

und lasse bemerken, daß dieselbe Zahl von Punkten entstehe, wenn die erste Vertikalreihe 3 fünfmal, oder wenn die erste Horizontalreihe 5 dreimal genommen wird. Daß dieses bei jeden zwei andern Zahlen gerade so seyn müsse, sieht man dann sogleich ein.

Ferner unterlasse man nicht zu bemerken, daß 1 mal 8 soviel als 8 mal 1 und beides die Zahl 8 selbst giebt; eben so, daß 0 mal 8 oder 8 mal 0 immer 0 giebt. — Was ist 1.7? 9.1? 0.5? 6.0? u. s. w.

§. 17.

Soll nun eine beliebige gegebene mehrziffrige Zahl z. B. 786439 mit einer einziffrigen z. B. 2 multiplicirt werden, so multiplicire man, von den Einern anfangend, jede einzelne Ziffer des Multiplikanden mit dem Multiplikator. Diese Produkte nun sind entweder 1) einziffrig, oder 2) zweiziffrig. Im erstern Falle schreibe man sie ohne weiteres unter; im zweiten Falle aber nur die Ziffer zur rechten, die

zur linken nehme man zu dem folgenden Produkt hinzu. Man erhält

Multiplikand	786439
Multiplikator	2
Produkt	1572878.

Zu 17. Dies Verfahren kann auf folgende Art einleuchtend erklärt werden: die Zahl 786439 besteht, sowie jede Zahl, aus einer Menge Einer, Zehende, Hunderte u. s. w. Soll nun selbige einigemal (hier 2 mal) genommen werden, so wird man jeden der einzelnen Theile, aus denen sie besteht, so vielmal nehmen, d. h. alle ihre einzelnen Ziffern mit der Zahl 2 multipliciren müssen. Die 9 Einer mit 2 multiplicirt geben 18 Einer oder 1 Zehend und 8 Einer; die 8 Einer schreibt man also unter die Einer, das 1 Zehend aber nimmt man mit zu der nächsten Reihe, welche die Zehende enthält, hinzu. Die 3 Zehende 2 mal genommen geben 6 Zehende, und jenes 1 hinzu, geben 7. Die 4 Hunderte 2 mal genommen geben 8 Hunderte. Die 6 Tausende 2 mal genommen geben 12 Tausende oder 1 Zehntausend und 2 Tausende, daher die 2 untergesetzt, das 1 Zehntausend aber zu der nächsten Reihe, welche die Zehntausende enthält, hinzugenommen wird u. s. w. — Uebrigens lasse man viel solcher Beispiele machen, und dabei nicht immer den Multiplikator gerade unter die Einer des Multiplikanden, sondern auch unter andere Ziffern desselben hinsetzen. Auch dürfen die Schüler im obigen zweiten Falle die Ziffer zur linken nicht erst hinschreiben, sondern sie müssen solche im Kopfe behalten.

§. 18.

Soll endlich eine mehrziffrige Zahl z. B. 43765 mit einer andern mehrziffrigen Zahl z. B. 9281 multiplicirt werden, so setze man beide unter einander, multiplicire den ganzen Multiplikanden mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplikators, von den Einern anfangend, setze die Reihen, die man erhält, so unter einander, daß jede folgende Stelle zur linken eingerückt wird, und addire dann selbige, sowie sie gerade unter einander stehen. Man erhält

Multiplikand	43765
Multiplikator	9281
	43765
	350120
	87530
	393885
Produkt	406182965.

Zu 18. Der Lehrer sage: Der Multiplikator besteht aus 9 Tausend, 2 Hundert, 8 Zehenden und Eins; wenn nun der Multiplikand 43765 mit dieser Zahl multiplicirt, d. h. so viel mal genommen werden soll, so kann man solchen erst 1 mal, dann 8 Zehend (achtzig) mal, dann 2 Hundertmal, zuletzt noch 9 Tausendmal nehmen. Nun hat man in der ersten Reihe den Multiplikanden wirklich 1 mal, in der zweiten Reihe 8 mal; er soll aber 8 Zehend mal, d. h. das Zehnfache von 8 mal genommen werden, und dies ist dadurch geschehen, daß man diese Reihe um 1 Stelle zur linken eingerückt hat, wodurch die ganze Reihe, bei der Addition, den zehnfachen Werth bekommen hat, weil jede einzelne Ziffer, indem sie um eine Stelle weiter zur linken steht, das zehnfache von dem ist, was sie seyn würde, wenn sie so wie in der ersten Reihe hingeschrieben worden wäre. In der dritten Reihe muß der Multiplikand 2 mal genommen werden; weil man aber auch diese Reihe wieder um 1 Stelle eingerückt hat, so steht sie, bei der Addition, um 2 Stellen zur linken, so daß dadurch jede Ziffer das 100fache desjenigen ist, was sie seyn würde, wenn man die Reihe gerade unter die erste Reihe setzte. Deswegen ist in der dritten Reihe der Multiplikand eigentlich 200 mal genommen. Eben so sieht man dann ein, daß er in der vierten Reihe nicht blos 9 mal, sondern vermöge des Einrückens 9000 mal genommen ist. Addirt man daher diese 4 Reihen, so hat man nothwendig den Multiplikanden 9281 mal genommen, was geschehen sollte.

Auf diese Art sehen die Schüler dann auch leicht ein, daß, wenn im Multiplikator Nullen vorkommen, man die sogleich überspringen kann, weil sie nichts anders bedeuten, als daß der Multiplikand gar nicht genommen werden soll. Dagegen darf man in diesem Falle nicht übersehen, daß das nächste Produkt (die nächste Reihe) um so viel Stellen mehr einge-

rückt werden muß, als Nullen neben einander im Multiplikator vorkommen, z. B.

Multiplikand	7820706
Multiplikator	507003
	23462118
	54744942
	39103530
Produkt	3965121404118.

Werden mehrere Reihen addirt, so bleibt die Summe immer dieselbe, wenn man sie auch in umgekehrter Ordnung hinschreibt, so daß die letzte die erste wird, die vorletzte die zweite u. s. w. Thut man dies in dem Beispiel des §. so erhält man:

Multiplikand	43765
Multiplikator	9281
	393885
	87530
	350120
	43765
Produkt	406182965,

d. h. man erhält dasselbe Produkt, wenn man mit der Ziffer am weitesten zur linken (9) zu multipliciren anfängt und so in der Reihe fortfährt, jede folgende Reihe aber, die man erhält, immer um 1 Stelle zur rechten rückt. Hat der Multiplikator Nullen, so findet dasselbe wie vorhin statt; man überspringt die Nullen, setzt aber das folgende Produkt um so viel Stellen mehr zur rechten als Nullen vorhanden waren. Das letzte Beispiel wird z. E.

Multiplikand	7820706
Multiplikator	507003
	39103530
	54744942
	23462118
Produkt	3965121404118.

Man gebe den Schülern über beide Arten der Multiplikation viele Beispiele, (man kann auch jedes Beispiel sogleich auf beide Arten fertigen lassen) so daß sie hierin große Fertigkeit erlangen, um desto mehr Geschicklichkeit und Fähigkeit zur Division mitzubringen.

§. 19.

So wie man drei und mehr Zahlen, z. B. 4 u. 5 u. 7 u. 2 zu einander addiren kann, indem man zuerst zwei addirt (4 und 5 gibt 9), zu dem was herauskommt noch die dritte (9 und 7 ist 16), endlich dazu noch die vierte (16 und 2 ist 18), so daß $4 + 5 + 7 + 2 = 18$ sich ergiebt; eben so kann man auch 3 oder mehr Zahlen z. B. 4, 5, 7, 2 mit einander multipliciren, indem man nämlich ebenfalls erst zwei mit einander multiplicirt (4 mal 5 giebt 20) dann damit die dritte (20 mal 7 ist 140), endlich damit noch die vierte (140 mal 2 ist 280); und so wie es bei der Addition einerlei ist, in welcher Ordnung man die gegebenen Zahlen nach und nach addirt, eben so ist auch bei der Multiplikation die Ordnung, wie die Zahlen nach einander genommen werden, völlig gleichgültig; immer erhält man dasselbe Resultat; z. B. statt obiger Ordnung diese genommen: $5 . 7 = 35$, $35 . 2 = 70$, endlich $70 . 4 = 280$, gibt auch die Zahl 280, wie vorher. Alle diese einzelnen Zahlen, die miteinander multiplicirt werden sollen, nennt man **Faktoren** dieses Produkts, und in dem gedachten Sinne giebt es also auch Produkte mit mehreren Faktoren, so wie es Summen mit mehreren Summanden giebt.

Zu 19. Man gebe mehrere hierher gehörige Beispiele theils in kleineren, theils auch in größeren Zahlen, lasse mehrere mal die Ordnung verändern, und zusehen ob auch immer einerlei herauskommt. Es ist dies eine angenehme Uebung des Multiplicirens selbst, und gewährt dabei noch den Vortheil, daß sich die Schüler den im §. angegebenen Satz, an so vielen Beispielen bestätigt gefunden, recht einprägen, was für das folgende von großem Nutzen seyn wird.

§. 20.

Wenn zwei Zahlen 24 und 3 gegeben sind, und die Zahl (8) gesucht werden soll, welche mit der Zahl 3 multiplicirt die andere 24 giebt, so gebraucht man dafür das Wort **dividiren**, man sagt „24 werde durch 3 dividirt"; die Zahl die herauskommt (hier 8), heißt der **Quotient**, die Zahl 24 (welche dividirt wird), heißt der **Dividend**, die andere 3 der **Divisor**. Statt zu schreiben „24 soll durch

3 dividirt werden", schreibt man kürzer 24:3 oder auch $\frac{24}{3}$, nennt das (:) oder (—) das **Divisionszeichen**, und spricht es aus mit dem Worte **durch**. Man schreibt also: 24:3 = 8 oder $\frac{24}{3}$ = 8. *)

§. 21.

Soll mit einer einziffrigen Zahl in eine solche ein oder zweiziffrige Zahl dividirt werden, daß der Quotient selbst wieder eine einziffrige Zahl wird, so geschieht die Division ohne weiters mittelst §. 16. Soll z. B. mit 7 in 56 dividirt werden, so weiß man aus dem angeführten §., daß 7 mal 8 die Zahl 56, folglich umgekehrt daß 56 durch 7 dividirt, 8 giebt. Aber man muß wohl bemerken, daß die Aufgabe nicht immer möglich ist. Wäre z. B. 59 durch 7 zu dividiren, so wüßte man zwar aus dem Ein mal Eins daß 7 mal 8 die Zahl 56 und 7 mal 9 die Zahl 63 giebt, allein man würde keine Zahl finden, die 7 mal genommen gerade 59 gebe. Man sagt aber dennoch: 59 durch 7 dividirt giebt 8 zum Quotienten und 3 als Rest; allein man meint dabei nichts anders, als daß die um 3 kleinere Zahl 56 durch 7 dividirt werden kann und 8 zum Quotienten giebt.

In dem Falle also, wo die Division nicht möglich ist, und wo sie nur in dem so eben angegebenen Sinne statt finden kann, findet man immer nur den nächst kleinsten Quotienten (8), und giebt dann noch den Rest (3) an, um welchen die als Dividend gegebene Zahl (59) größer ist als das nächste Produkt (56); man erhält diesen Rest, wenn man dieses Produkt 56 von dem gegebenen Dividenden subtrahirt.

Zu 21. Man übe die Schüler durch sehr viele hierher gehörige Beispiele, sowohl solche, wo die Division möglich ist, als auch solche, wo nur der nächst kleinste Quotient an-

---

*) Genau genommen, versteht man unter „**Quotient**" das **Zeichen** $\frac{24}{3}$ oder 24:3; und die Zahl 8 ist bloß diesem Quotienten gleich. — Eben so versteht man unter dem Worte „**Dividiren**" eigentlich bloß das **Hinschreiben** des **Quotienten** $\frac{248}{8}$, der aber nachher in die Zahl 31, d. h. in die gleichbedeutende **Summe** 30 + 1 umgeformt wird. — Diese Kunst des **Umformens** ist aber die **Rechenkunst**.

gegeben werden kann. Z. B. was giebt 54 : 6? $\frac{63}{9}$? $\frac{48}{8}$? 24 : 6? 56 : 9? 29 : 4? 36 : 8? $\frac{43}{7}$? $\frac{83}{9}$? $\frac{75}{3}$? u. s. w. — Man unterlasse hier auch nicht zu bemerken, daß 0 durch irgend eine Zahl dividirt auch 0 zum Quotienten giebt, daß wenn der Divisor größer ist als der Dividend, z. B. in 3 : 4, der Quotient immer 0 ist, und der ganze Dividend zum Rest bleibt. Also 6 durch 8 dividirt gibt 0 und die Zahl 6 bleibt als Rest. Ferner giebt jede Zahl durch sich selbst dividirt immer 1 zum Quotienten, z. B. 8 : 8 = 1, 7 : 7 = 1, 424 : 424 = 1 u. s. w. Endlich giebt jede Zahl durch 1 dividirt immer sich selbst als Quotienten, z. B. 7 : 1 = 7, 21 : 1 = 21 u. s. w.

§. 22.

Soll mit einer mehrziffrigen Zahl z. B. 7964 in eine solche andere mehrziffrige Zahl z. B. 61053 dividirt werden, daß der Quotient nur einziffrig wird, so kann dies nicht anders als durch Versuche geschehen. Man nimmt irgend eine einziffrige Zahl z. B. 8, multiplicirt damit den Divisor 7964, und sieht zu, ob der Dividend 61053, oder wenigstens eine Zahl, die weniger als um den ganzen Divisor von ihm verschieden ist, herauskommt. Man findet 8 mal 7964 gleich 63712, folglich ist 8 zu groß; die kleinere Zahl 6, die man nun nimmt, mit 7964 multiplicirt, giebt 47784; dies von dem Dividenden 61053 abgezogen giebt 13269 zum Rest, und da dieser Rest größer als der Divisor 7964 ist, so ist die Zahl 6 zu klein; da nun 6 zu klein und 8 zu groß ist, so muß 7 der gesuchte Quotient seyn. Man schreibe dies so:

Divisor	Dividend	Quotient
7964	61053	7
	55748	
	Rest 5305	

Ohnerachtet man übrigens bei dieser Division den Quotienten immer nur auf die angezeigte Art durch Versuche finden kann, so erlangt man doch bald durch Uebung eine solche Fertigkeit, daß man selten mehr einen mislungenen Versuch macht; auch kann man dadurch dem Quotienten schon ziemlich nahe kommen, daß man bloß die ersten Ziffern des Dividenden und Divisors durch einander dividirt, also hier, daß man sagt:

61 durch 7 giebt höchstens 8, so daß man also keine größere Zahl als 8, und auch keine viel kleinere z. B. 4, 5 u. dgl. zu versuchen hat. Ja, dieses Verfahren giebt in den meisten Fällen gleich den richtigen Quotienten, besonders wenn man die Vorsicht gebraucht, die erste Ziffer des Divisors um 1 größer zu nehmen, sobald die folgende Ziffer 7, 8 oder gar 9 ist. Hätte man z. B. hier statt der ersten Ziffer 7, wegen der darauf folgenden 9, die um 1 größere 8 genommen und damit in die erstern Ziffern des Dividenden dividirt, so hätte man sogleich die Zahl 7 erhalten, welches wirklich auch der wahre Quotient ist

Zu 22. Man unterlasse ja nicht, so lange bloß Aufgaben dieser Art zu geben, bis die Schüler den Quotienten und den Rest, ohne erst lange zu versuchen, fertig und bestimmt angeben können. Gewöhnlich vernachläßiget man diese Art Aufgaben gänzlich und giebt an deren Stelle solche, wo der Divisor einziffrig, der Dividend aber beliebig mehrziffrig ist, welche indessen zur Erleichterung der folgenden allgemeinen Aufgabe auch nicht das geringste beitragen, aber füglich weggelassen werden können.

§ 23.

Sollen endlich zwei beliebige mehrziffrige Zahlen durch einander dividirt werden, z. B. 4668454 durch 4798, so verfahre man auf folgende Weise:

a) Man setze den Divisor hin, den Dividenden zur rechten wie im §. 22 gezeigt.

b) Man nehme nun vom Dividenden, von der linken zur rechten Hand gehend, so viele Ziffern als der Divisor hat, oder eine Ziffer noch mehr, wenn die erstere Zahl noch kleiner seyn sollte, als der Divisor (also hier die Ziffern 46684).

c) In diese Zahl 46684 dividire man mit dem Divisor 4798 nach §. 22, und bestimme den Rest; den Quotienten 9, den man erhält, schreibe man zur rechten des Dividenden.

d) Zu diesem Rest 3502 setze man die nächste Ziffer 5 des Dividenden und dividire in diese Zahl 35025 aufs neue

mit dem Divisor, setze den Quotienten 7 zur rechten der vorigen Ziffer 9, und bestimme wieder den Rest.

e) Mit diesem Rest verfahre man ganz, wie in vorhergehender Nr. 4, so erhält man die dritte Ziffer 3 zur rechten des Divisors.

f) So wie in 4 und 5 fahre man nun fort, setze immer zum Rest eine neue folgende Ziffer des Dividenden, dividire immer wieder mit dem Divisor, setze den jedesmaligen Quotienten immer zur rechten der früher erhaltenen Ziffern und bestimme immer den Rest so lange fort, bis die letzte Ziffer des Dividenden herabgesetzt und für diese noch der letzte Quotient gefunden und zur rechten der übrigen hingesetzt ist. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist die Zahl 973 zur rechten des Dividenden der gesuchte Quotient; bleibt aber noch ein Rest, so ist selbige der nächstkleinste Quotient, und der Rest ist der dazu gehörige. Die Arbeit bekommt folgende Form:

Divisor	Dividend	Quotient
4798	4668454	973
	43182	
	35025	
	33586	
	14394	
	14394	
	00000.	

Oder, wenn 4668910 durch 4798 zu dividiren ist,

Divisor	Dividend	Quotient
4798	4668910	973
	43182	
	35071	
	33586	
	14850	
	14394	
	Rest 456.	

Zu 23. Um den Grund dieses Verfahrens anschaulich zu machen, lasse man erstlich 4798 mit 973 auf die obige zweite Art multipliciren; dies giebt

$$\begin{array}{r} 4798 \\ 973 \\ \hline 43182 \\ 33586 \\ 14394 \\ \hline 4668454. \end{array}$$

Soll nun umgekehrt 4668454 durch 4798 dividirt, d. h. gefunden werden, wievielmal 4798 genommen werden müsse, um 4668454 zu geben, so würde man diese Zahl sogleich wissen, wenn man den Dividenden 4668454 in die 3 Reihen zerlegen könnte, aus denen er durch Addition so eben entstand; denn die eine Reihe 43182 erhält man, wenn man den Divisor 9 hundert mal nimmt, die zweite 33586 entsteht, indem der Divisor 7 Zehend mal genommen wird, und die dritte 14394 ergiebt sich, wenn man den Divisor 3 mal nimmt; da nun der ganze Dividend 4668454 aus diesen 3 Reihen besteht, so entsteht er, wenn der Divisor 9 Hundert mal und 7 Zehend mal und 3 mal, d. h. 973 mal genommen wird; die Zahl 973 ist also der gesuchte Quotient. Es kommt daher alles darauf an, den Dividenden 4668454 wirklich in die 3 Reihen zu zerlegen; und gerade dieses ist durch die vorhin angegebene Operation geschehen, wie man sich leicht durch Vergleichung mit der oben wirklich gelösten Aufgabe der Division überzeugen kann. —

So leicht die Operation des Dividirens ist, indem sie gleichsam bloß aus Multiplikation besteht, so findet man doch, daß selbst fähigere Knaben in einigen Fällen, z. B. da wo eine Null zum Quotienten kommt, sich nicht forthelfen können. Man muß daher, außer der allgemeinen Regel: von einem Paragraphen nicht eher zum folgenden zu schreiten, als bis das in dem erstern geforderte geläufig und fertig geleistet werden kann, hier auch noch insbesondere auf die Regeln recht aufmerksam machen: 1) daß jeder Rest immer kleiner seyn müsse als der Divisor, so daß also, wenn dies einmal nicht der Fall seyn sollte, der Quotient zu klein genommen, und daher größer zu nehmen ist; 2) daß man zu jedem Rest immer die folgende Ziffer herabsetzen müsse, aber nie mehr als eine einzige auf einmal; 3) daß man dann, wenn diese Ziffer hinzugesetzt ist, jedesmal dividiren müsse, auch

wenn die zu dividirende Zahl kleiner wäre als der Divisor; man erhält dann eine 0 im Quotienten, und da die zu dividirende Zahl sogleich als Rest bleibt, so kann man jetzt noch die nächste Ziffer des Dividenden hinzusetzen, und auf's neue dividiren; endlich 4) daß man auch noch bei der letzten herabgesetzten Ziffer dividiren müsse, auch dann, wenn diese Zahl kleiner als der Divisor seyn sollte; in diesem Falle erhält man noch eine 0 zum Quotienten. Z. B. sey zu dividiren 218292089 durch 4308, so erhält man

Divisor	Dividend	Quotient
4308	218290089	50670
	21540	
	2890	
	28900	
	25848	
	30528	
	30156	
	3729	
	Rest 3729.	

Außerdem ist noch zu bemerken, daß es nur 10 Ziffern giebt, daß also jede Ziffer des Quotienten, wenn selbiger deren auch 20 und noch mehr haben sollte, immer eine von diesen 10 Ziffern seyn müsse. Wenn man daher den Divisor gleich anfänglich mit allen Ziffern von 2 bis 9 multiplicirt, und diese Produkte selbst unter den Divisor schreibt, so ist man der verschiedenen Versuche des §. 22 überhoben, weil man unter den vorhandenen Produkten sogleich das nächste kleinste wählen kann, und wenn man neben die Produkte auch die Zahl noch hinschreibt, die anzeigt, wievielmal der Divisor genommen wurde, so hat man diese Zahl sogleich als die gesuchte Ziffer des Quotienten; dabei auch alle fernere Multiplikation erspart, weil alle möglichen Produkte, und insbesondere das bei jeder Division nöthige, schon erzeugt und bei der Hand sind. Soll z. B. 4907643085 durch 594 dividirt werden, so bekommt man auf diese Art

Divisor	Dividend	Quotient
1. 594	4907643085	8262025
2. 1188	4752	
3. 1782	1556	
4. 2376	1188	
5. 2970	3684	
6. 3564	3564	
7. 4158	1203	
8. 4752	1188	
9. 5346	150	
	1508	
	1188	
	3205	
	2970	
	Rest 235.	

Es sind hier zuerst die Produkte 2 mal 594 oder 1188; 3 mal 594 oder 1782; 4 mal 594 oder 2376 und so fort bis 9 mal 594 oder 5346 gebildet und unter den Divisor selbst gesetzt worden. Die ersten Ziffern des Dividenden waren 4907, unter den gedachten Produkten das 8te das nächst kleinste 4752; man nahm also dieses, zog es ab, setzte die Ziffer 8 zur rechten des Dividenden, hing an den Rest die nächste Ziffer 6 des Dividenden und erhielt 1556; unter den Produkten war dieser Zahl zunächst das 2te 1188; diese Zahl 2 gab nun die zweite Ziffer des Quotienten, das Produkt 1188 setzte man aber unter 1556, zog ab, erhielt 368, setzte dazu die nächste Ziffer 4 des Dividenden und fuhr dann so weiter fort, ohne mehr etwas zu thun, als die Produkte aussuchen und subtrahiren, die Zahl der Stelle des Produktes aber als neue Ziffer des gesuchten Quotienten hinzuschreiben.

Anmerkung. Der Lehrer mache den Schüler möglichst oft und in möglichst vielen Beispielen darauf aufmerksam,

1) daß er durch das Geschäft des Multiplicirens allemal eine Zahl (den Multiplikanden) vervielfältige, daß man also eine Zahl mit 13 multipliciren muß, wenn man das 13 fache derselben erhalten wolle; und

2) daß er durch das Geschäft des Dividirens mit einer (ganzen) Zahl allemal eine Zahl (den Dividenden) in gleiche Theile theile, daß man also z. B. durch 9 dividiren muß irgend eine gegebene Zahl, wenn man dieselbe Zahl in 9 gleiche Theile getheilt sehen wolle, d. h. wenn man den 9ten Theil dieser Zahl haben wolle.

Kapitel III.

Einige Eigenschaften der Zahlen in Bezug auf die vier ersten Operationen. Abkürzung der Rechnungen, die durch sie statt finden können.

§. 24.

Wenn eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt werden soll, so hängt man an selbige bloß ein, zwei, drei ꝛc. Nullen, z. B. 47 ⋈ 100 = 4700; 239 ⋈ 10 = 2390; 17 ⋈ 10000 = 170000; 239 ⋈ 100000 = 23900000; 100 ⋈ 1000 = 100000; 10 ⋈ 100 = 1000 u. s. w.

Zu 24. Denn 17 mit 10000 multipliciren heißt nichts anders, als 17, zehntausend mal, oder auch Zehntausend 17 mal nehmen; man soll also nichts anders thun, als 17 Zehntausender schreiben, und dies geschieht indem man 17 um 4 Stellen zur linken rückt, giebt 170000.

§. 25.

Soll eine beliebige Zahl mit einer andern multiplicirt werden, die zur rechten ein oder mehrere Nullen hat, so denkt man sich auf einen Augenblick diese Nullen weg, multiplicirt bloß die übrig bleibenden Zahlen mit einander, und hängt an das Produkt die vorhin weggedachten Nullen an. Z. B. 729 ⋈ 180 giebt 131220; denn 729 ⋈ 18 giebt 13122 und davon noch die von 180 weggedachte Null angehängt, giebt 131220. Eben so ist 4792 ⋈ 90 = 431280. Die Rechnung selbst sieht so aus

Multiplikand	4792
Multiplikator	90
	431280

Zu 25. Denn 180 ist nichts anders, als 18 Zehende; soll nun 180 mit 729 multiplicirt werden, so soll man die 18 Zehende 729 mal nehmen und daher 18 mit 729 multipliciren; das was herauskommt (13122) aber als Zehende betrachten, folglich noch die Null anhängen, wodurch 13122 zu eben so viel Zehenden wird. Eben so ist 2430000 ⋈ 37 (da 243 ⋈ 37 = 8991 ist) gleich der Zahl 89910000 u. dgl. m.

§. 26.

Hat man zwei Zahlen mit einander zu multipliciren, von denen jede zur rechten eine oder mehrere Nullen hat, so denkt man sich von beiden diese Nullen weg, multiplicirt die übrig bleibenden Zahlen mit einander, und hängt an das, was herauskommt, noch so viel Nullen, als in beiden gegebenen Zahlen zusammen weggedacht wurden. Z. B. 24700 ⋈ 580000 giebt folgende Rechnung:

Multiplikand	24700
Multiplikator	580000
	1976
	1235
Produkt	14326000000.

Eben so ist 80000 ⋈ 600 = 48000000; u. s. w.

Zu 26. Denn es ist 24700 nichts anders, als 247 mal 100, und 580000 so viel als 58 mal 10000. Sollen also beide Zahlen mit einander multiplicirt werden, so hat man 247 ⋈ 100 ⋈ 58 ⋈ 10000 zu finden. Nach §. 19 erhält man aber dasselbe Resultat, wenn man die 4 Zahlen 247, 100, 58, 10000 in anderer Ordnung multiplicirt; man kann also erst 247 m. 58 multipliciren, giebt 14326; dann auch 100 m. 10000, giebt 1000000; und endlich noch diese beiden mit einander; 14326 mit 1000000 giebt nach §. 24 14326000000.

§. 27.

Wenn eine Zahl durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt werden soll, so schneidet man von der rechten zur linken, ein, zwei, drei ꝛc. Ziffern ab; was zur linken noch bleibt, ist der

gesuchte Quotient, die abgeschnittenen Ziffern aber der Rest; sind sie Nullen, so bleibt kein Rest. Z. B. $\frac{47000}{100} = 470$; $\frac{1030000}{10000} = 103$; $\frac{47}{10}$ giebt 4 und 7 bleibt Rest; $\frac{27600}{1000}$ giebt 27 und 600 bleibt im Rest, u. dgl. m.

Zu 27. Dieß ist auf folgende Art anschaulich zu machen. Wenn man 470 mit 100 multiplicirt, und nachher wieder durch 100 dividirt, so muß die Zahl 470 wieder herauskommen. Multiplicirt man aber mit 100, so werden 2 Nullen angehängt, folglich müssen dieselben 2 Nullen wieder abgeschnitten werden, sobald man durch 100 dividirt. Hätte man zu der Zahl 47000 noch 36 addirt, giebt 47036, und dann durch 100 dividirt, indem man zwei Stellen abschneidet, so hätte man wieder 470 erhalten, und die zwei abgeschnittenen Stellen sind natürlich nichts anders, als die Zahl 36, um welche 47036 größer als diejenige Zahl 47000 ist, die eigentlich zunächst durch 100 dividirt werden kann; diese Ziffern 36 machen also den Rest aus.

§. 28.

Soll eine beliebige Zahl z. B. 43796 durch eine Zahl dividirt werden, die zur rechten ein oder mehrere Nullen hat, z. B. durch 800, so schneidet man die Nullen des Divisors und eben so viele Ziffern des Dividenden von der rechten zur linken ab, und dividirt dann bloß die links übrig gebliebenen Zahlen durch einander. Die Rechnung wird dann so:

Divisor	Dividend	Quotient
800	437 | 96	54
	40	
	37	
	32	
	5	

der letzte Rest 5 nebst den abgeschnittenen Ziffern 96, also 596, ist der Rest; die Zahl 54 aber der Quotient.

Zu 28. Denn 43796 besteht aus 43200 und 596. Dividirt man aber 43200 durch 800, d. h. 432 Hundert durch 8 Hundert, so sucht man, wieviel mal 8 Hundert genommen werden müsse, um 432 Hundert zu geben, d. h. wieviel mal 8 genommen werden müsse, um 432 zu geben. Man darf

folglich nur mit 8 in 432 dividiren, um den gesuchten Quotienten zu erhalten, und dies ist oben geschehen; man hat zwar oben mit 8 in 437 dividirt, allein es blieb auch 5, als um wieviel diese Zahl zu groß war, um durch 8 dividirt werden zu können, übrig. Die Zahl 43200 durch 800 dividirt giebt also 54, und da 43796 nur um 596 größer ist, diese Zahl 596 aber kleiner ist als der Divisor 800, so ist selbige Zahl 596 der Rest.

§. 29.

Wenn man zwei Zahlen mit einander multipliciren soll, so kann man die eine davon auch in zwei oder mehr Theile zerlegen, die theils addirt theils subtrahirt sind, und nun den Multiplikanden so viel mal nehmen, als diese Theile angeben, die Produkte aber zu einander addiren oder subtrahiren, je nachdem die Theile selbst addirt oder subtrahirt sind. Z. B. wenn 437 mit 83 oder mit 78 multiplicirt werden soll, so zerlege man 83 in 80 + 3, oder 78 in 80 — 2, und erhält nun

	437	437		437
	80	3		83
	34960	1311		1311
addirt	1311		statt	3496
	36271			36271
oder				
	437	437		437
	80	2		78
	34960	874		3496
subtr.	874		statt	3059
	34086			34086

Es ist nämlich einerlei, ob man 437, 83 mal auf einmal nimmt, oder zuerst 80 mal und dann noch 3 mal; eben so muß es einerlei seyn, ob man 437, 78 mal nimmt, oder zuerst 80 mal, und dann noch die 2 mal, um welche es jetzt zu viel genommen, wieder subtrahirt.

§. 30.

Sollen umgekehrt zwei oder mehr Zahlen mit einer und derselben Zahl multiplicirt, und alle Produkte nachher addirt werden, so erhält man dasselbe, wenn man die gegebenen Zahlen zuerst addirt, und die ganze Summe dann mit derselben Zahl auf einmal multiplicirt. Wäre z. B. 437, 329,

514 jede mit 149 zu multipliciren, und dann die Produkte zu addiren, so erhielte man

	437		437	329
addirt	329		149	149
addirt	514		3933	2961
	1280		1748	1316
mult.	149	statt	437	329
	11520		65113	49021
	5120			
	1280		514	
	190720		149	
			4626	
			2056	
			514	
			76586	
		addirt	49021	
		addirt	65113	
			190720.	

Beide Resultate sind dieselben, aber das erstere ist mit viel weniger Mühe erhalten worden.

Zu 30. Ist leicht anschaulich zu machen, wenn man sagt, daß es einerlei ist, ob man die Zahl 149 erst 437 mal, dann 329 mal, endlich noch 514 mal dazu nimmt, oder ob diese Zahl 149 gleich auf einmal 1280 mal (d. h. so viel mal, als 437, 329 und 514 zusammen ausmachen) genommen wird.

§. 31.

Sollen aber zwei Zahlen z. B. 543 und 349 jede mit derselben Zahl 217 multiplicirt, und dann das letztere Produkt vom erstern subtrahirt werden, so erhält man dasselbe, wenn man die Zahlen 543 und 349 zuerst von einander subtrahirt, und dann bloß diese Differenz mit 217 multiplicirt. Man erhält also:

	543			543		349
subtr.	349		mult.	217	mult.	217
	194	statt		3801		2443
mult.	217			543		349
	1358			1086		698
	194			117831		75733
	388		subtr.	75733		
	42098			42098		

wo man wieder auf beiden Wegen dasselbe Resultat, das erstere aber weit kürzer erhielt.

Zu 31. Dies wird auf eine ähnliche Art anschaulich gemacht, wie in §. 30, oder auch wie in §. 29, indem dieser letztere den hiesigen Satz schon enthält, und solcher hier nur andere Anwendung findet.

§. 32.

Die beiden Operationen „Addiren" und „Subtrahiren", eben so die beiden andern „Multipliciren" und „Dividiren" heben einander auf, und zwar finden 4 Fälle dieses Aufhebens statt.

1) Wenn man zwei Zahlen zu einander addirt und dann eine derselben von der Summe wieder subtrahirt, so bleibt die andere übrig; z. B.

	479085			479085
addirt	328976		addirt	328976
Summe	808061	oder	Summe	808061
subtr.	328976		subtr.	479085
Differenz	479085		Differenz	328976

2) Wenn man eine Zahl von einer andern subtrahirt, und dann dieselbe wieder addirt, so kommt die vorige Zahl wieder heraus; z. B.

	7854298
subtr.	2598764
Differenz	5255534
addirt	2598764
Summe	7854298

3) Wenn zwei Zahlen mit einander multiplicirt werden, und man dividirt dann das, was herausgekommen ist wieder mit einer dieser Zahlen, so kommt die andere heraus, z. B. 8 mal 6 ist 48; 48 durch 6 dividirt, giebt 8; 48 durch 8 dividirt giebt 6.

Eben so mit zwei andern Zahlen.

4) Wenn man eine Zahl durch eine zweite dividirt, und was herauskommt, sogleich wieder mit dieser multiplicirt, so kommt ebenfalls die erste Zahl wieder heraus, z. B. 96 durch 8 dividirt giebt 12, dies wieder mit 8 multiplicirt giebt die erste Zahl 96.

Käme nun z. B. in einer Rechnung vor, daß 437 mit 678 zu multipliciren ist, und fände sich nachher, daß die Zahl, die sich da ergiebt (296286) gerade durch die Zahl 678 wieder dividirt werden solle, so wüßte man nach Nr. 3 sogleich, daß die erste Zahl 437 wieder herauskommt, sobald man sich nur erinnert, daß 296286 entstanden war, indem man 437 mit 678 multiplicirte. — Es ist daher in den meisten Fällen höchst vortheilhaft, alle Operationen zuerst bloß anzuzeigen und nicht eher wirklich zu verrichten, als bis man dieses Aufheben der Operationen (namentlich in Nr. 3 und 4) auf alle mögliche Weise versucht hat. Soll man also 437 mit 678 multipliciren, so schreibt man nur 437 . 678 (d. h. man zeigt die Multiplikation bloß an, wo 437 . 678 als eine einzige Zahl, nämlich als 296286 angesehen wird). Soll nun späterhin, das was hier herauskommt, wieder durch 678 dividirt werden, so schreibt man bloß $\frac{437 . 678}{678}$, und setzt dafür jetzt sogleich 437, weil man weiß, daß sich die Multiplikation und Division mit derselben Zahl 678 einander aufheben. — Diese Art zu rechnen gewährt sehr großen Vortheil, da die Operationen sich meistens, wenigstens zum Theil, gegenseitig aufheben. Sollte sich in irgend einem Falle dennoch nichts aufheben lassen, so hat man nichts verloren, da man jetzt noch immer verrichten kann, was die Zeichen andeuten.

In diesen einfachen Sätzen und namentlich in denen Nr. 3 und 4 ist die Grundlage der meisten möglichen Abkürzungen enthalten. — Später wollen wir das hier allgemein gesagte in einigen besondern (den gewöhnlich vorkommenden) Fällen noch besonders darstellen.

§. 33.

Hat man sich den Satz §. 19 recht und in seinem ganzen Umfange eingeprägt, so sieht man sogleich mehrere für die Anwendung wichtige Folgen unmittelbar daraus hervorgehen. Jener Satz lehrte aber 1) daß eben so, wie man mehrere Zahlen zu einander addiren kann, auch mehrere Zahlen mit einander multiplicirt werden können; 2) daß man (wie bei der Addition) immer dieselbe Zahl als Resultat er-

hält, man mag multipliciren, in welcher Ordnung man will. Ist z. B. gegeben das Produkt 8.6 (d. h. 48), und soll solches multiplicirt werden mit 9.5 (d. h. 45), so erhält man dasselbe Resultat (48.45 oder 2160), wenn man die Multiplikation erstlich blos anzeigt, giebt 8.6.9.5, und dann die 4 Zahlen, die hier mit einander multiplicirt werden sollen, in beliebiger Ordnung nimmt, z. B. erstlich 8.9 giebt 72, dann 6.5 giebt 30, endlich 72.30 giebt 2160, wie vorher; oder erstlich 6.9 giebt 54, dann 8.5 giebt 40, zuletzt 54.40 giebt 2160, gerade wieder so, oder auch: erstlich 5.9 giebt 45, dann 45.8 giebt 360, zuletzt 360.6 giebt abermals 2160.

§. 34.

Daraus folgt: daß, wenn man ein Produkt z. B. 17.4 (d. h. 68) mit einer Zahl z. B. 6 zu multipliciren hat, man nur einen Faktor multipliciren darf, entweder nur 17 oder nur 4; man erhält also statt 17.4, 6 mal genommen, entweder 17.24 oder 102.4 (beides giebt die Zahl 408, d. h. so viel als 68 mal 6).

Zu 34. Ist den Schülern auf folgende Art begreiflich zu machen: Soll 17.4 mit 6 multiplicirt werden, so soll man erst 17 mit 4, dann was herauskommt noch mit 6 multipliciren; es werden also die drei Zahlen 17, 4 und 6 mit einander multiplicirt, d. h. 17.4.6 gefunden. Nach dem angeführten §. 19 nun kann man hier auch zuerst 17 mit 6, dann noch mit 4 multipliciren, dies giebt 102.4; oder man kann auch zuerst 6 mit 4, dann noch mit 17 nehmen und dies giebt 17.24 oder 24.17.

§. 35.

Daraus folgt aber auch umgekehrt, daß, wenn ein Produkt z. B. 17.24 (d. h. 408) wieder durch eine Zahl z. B. 6 dividirt werden soll, man nur einen Faktor zu dividiren habe, entweder 17 oder 24. Hier läßt sich der erstere nicht ohne Rest dividiren, bei dem zweiten aber erhält man, wenn durch 6 dividirt werden soll, aus 17.24 (d. h. 408) sogleich wieder 17.4 (d. h. 68), welches wirklich die Zahl ist, die 6

mal genommen, 17.24 giebt, d. h. welches wirklich der 6te Theil von 17.24, d. h. von 408 wieder ist.

Zu 35. Außer der Anschaulichkeit mit der dieser Satz aus dem vorhergehenden Satze abzuleiten ist, präge solchen der Lehrer auch wohl durch viele Beispiele ein. Man lasse nämlich erstlich zwei Zahlen z. B. 437 und 72 mit einander multipliciren (giebt 31464), und dann diese Zahl durch 12 dividiren (giebt 2622), hernach aber die erstere Multiplikation blos anzeigen (giebt 437 . 72), eben so die nachfolgende Division (giebt $\frac{437 \,.\, 72}{12}$), und zuletzt diese Division nach §. 35 verrichten, indem man nämlich den einen Faktor 72 dividirt; man erhält dann aus 437.72 durch 12 dividirt, die Zahl 437.6 (d. h. 2622), also gerade dasselbe wie vorher.

§. 36.

Wenn zwei Produkte z. B. 144.37 (d. h. 5328) und 8.37 (d. h. 296) durch einander dividirt werden sollen, und sie haben, wie hier, einen gemeinschaftlichen Faktor, so streicht man diesen gegenseitig durch, und dividirt blos noch die andern übrigen Zahlen 144 und 8 durch einander; d. h. statt $\frac{144 \,.\, 37}{8 \,.\, 37}$ hat man blos $\frac{144}{8}$ (d. h. 18).

Zu 36. Dies wird anschaulich, wenn man sagt: das 37 fache von 8 muß eben so vielmal genommen werden, um das 37 fache von 144 zu geben, als die Zahl 8 selbst genommen werden muß, um 144 zu geben; also ist es einerlei, ob man 144 mal 37 durch 8 mal 37 oder bloß 144 durch 8 dividirt. Um übrigens den Sinn und den Gebrauch dieses Satzes recht kennen zu lehren, muß man zuerst die beiden Zahlen 144 und 37 mit einander, eben so dann die beiden Zahlen 8 und 37 mit einander multipliciren, und dann die beiden erhaltenen Zahlen 5328 und 296 durch einander dividiren lassen, nachher aber die beiden Multiplikationen, so wie die Division einstweilen bloß anzeigen, giebt $\frac{144 \,.\, 37}{8 \,.\, 37}$, die gemeinschaftlichen Faktoren 37 gegen einander weglassen, giebt $\frac{144}{8}$, und diese Division endlich verrichten, wobei sich sogleich

die Zahl 18 ergiebt. Dasselbe an vielen andern Beispielen; z. B. $\frac{549 . 729}{729 . 9} = \frac{549}{9}$, und giebt sogleich 61; oder $\frac{683 . 729}{27 . 683} = \frac{729}{27}$ oder 27.

§. 37.

Das ganze findet keine Abänderung, wenn die Produkte mehr als 2 Faktoren haben; z. B. statt $\frac{47 . 96 . 37}{16 . 37}$ kann man setzen $\frac{47 . 96}{16}$ und diese Division kann man sogleich auch nach §. 35 verrichten, welches giebt 47.6 oder 282. Statt dieses Verfahrens müßte man erst 47 mit 96, dann, was herauskommt, mit 37, eben so auch 16 mit 37 multipliciren, und erstere herauskommende Zahl durch letztere dividiren, um dann, aber erst nach so vieler Mühe und Arbeit, dasselbe Resultat 282 zu erhalten.

Eben so ist $\frac{84 . 72 . 19}{28 . 19 . 36} = \frac{84 . 72}{28 . 36}$.

§. 38.

Desgleichen leidet dieser Satz keine Aenderung, wenn Produkte durch einander dividirt werden sollen, die mehrere gemeinschaftliche Faktoren haben; immer streicht man die gemeinschaftlichen Faktoren gegenseitig durch; z. B. $\frac{24 . 37 . 49 . 87}{37 . 87}$ giebt sogleich 24.49; d. h. statt erstlich 24, 37, 49 und 87 mit einander zu multipliciren, und eben so die Zahlen 37 und 87 mit einander, und dann die beiden herauskommenden Zahlen 3785544 und 3219 durch einander zu dividiren, zeigt man alles bloß an, streicht die gemeinschaftlichen Faktoren im Divisor und Dividenden gegenseitig weg und behält hier bloß noch 24.49 übrig, so daß man also nur diese Multiplikation allein, statt voriger mühvoller Rechnungen, zu verrichten hat, um dasselbe Resultat 1176 zu erhalten. —

Eben so ist $\frac{129 . 95 . 48 . 144}{54 . 129 . 16 . 95} = \frac{48 . 144}{54 . 16}$; u. s. w.

§. 39.

Wenn zwei Zahlen durch einander dividirt werden sollen, z. B. 31464 durch 72, so erhält man dasselbe, wenn man vorher den Divisor und Dividenden mit einer gemeinschaftlichen Zahl z B. 9 multiplicirt oder dividirt. Die Rechnung wird dann

Divisor	Dividend	Quotient
72	31464	437
Neuer Divisor	Neuer Dividend	Neuer Quotient
648	283176	437
oder 8	3496	437

Zu 39. Denn der Dividend 31464 ist 3496.9, eben so der Divisor 72=9.8, folglich beide durcheinander dividirt, geben $\frac{3496.9}{9.8}$, oder nach dem vorhergehenden $\frac{3496}{8}$.

§. 40.

Wendet man diesen Satz da an, wo Produkte durch einander dividirt werden sollen, z. B. wenn 48.144 durch 54 . 16 dividirt werden soll (angezeigt erhält man $\frac{48 . 144}{54 . 16}$) so kann man öfters die Resultate höchst einfach erhalten. In diesem gegebenen Falle kann man erstlich den Dividenden und Divisor durch die gemeinschaftliche Zahl 16 dividiren; im Dividenden erhält man (nach §. 35) 3.144, im Divisor aber (nach §. 32, Nr. 3) 54, also sogleich $\frac{3.144}{54}$; auch hier, wo 3.144 durch 54 dividirt werden soll, kann man wieder erst Dividend und Divisor durch die gemeinschaftliche Zahl 3 dividiren; im Dividenden erhält man dann 144, im Divisor aber 18, also $\frac{144}{18}$; hierauf kann man diesen Satz auf's neue anwenden, beide durch 6 dividiren und erhält $\frac{24}{3}$, wofür man sogleich die Zahl 8 setzen kann. Hätte man aber gleich 48 mit 144, eben so 54 mit 16 multiplicirt, und dann die

herauskommenden Zahlen durch einander dividirt, so würde man dieselbe Zahl 8 zum Resultat erhalten haben.

§. 41.

Alle Sätze von §. 32 bis §. 40 können daher für den praktischen Gebrauch in folgende allgemeine Regel zusammengefaßt werden: Wenn das Produkt einer Reihe von Zahlen durch ein Produkt einer andern Reihe von Zahlen dividirt werden soll, so streiche man erstlich die gleichen Zahlen, die in beiden Reihen vorkommen (die gemeinschaftlichen Faktoren), gegeneinander weg; dann suche man irgend eine Zahl, wodurch ein Faktor der einen Reihe, sowie auch einer der zweiten Reihe zugleich ohne Rest dividirt werden können, dividire beide wirklich, und setze die Quotienten an die Stelle dieser Faktoren; mit diesem Geschäft fahre man fort, bis keine solche Zahlen mehr zu finden sind; dann aber multiplicire man die jetzigen Zahlen in jeder Reihe mit einander, und dividire das eine dieser Produkte durch das andere. Es seyen z. B. mit einander zu multipliciren die Zahlen 144, 729, 48, 64 und 50, dann auch die Zahlen 72, 48, 108, 50, 2 und 16, und das erstere durch das letztere zu dividiren, so hat man

	Divisor	Dividend
	72.48.108.50.2.16	144.729.48.64.50
oder	72.108.2.16	144.729.64

oder indem man 108 und 729, jede durch 27 dividirt.

72 . 4 . 2 . 16 | 144 . 27 . 64

oder links und rechts durch 16 dividirt

72 . 4 . 2 | 144 . 27 . 4

72 . 2 | 144 . 27

oder links und rechts mit 72 dividirt

2 | 2 . 27

und dies giebt sogleich 27 zum Resultat, welches man auf diesem Wege viel leichter erhalten hat, als wenn man obige Multiplikationen und darauf folgende Divisionen wirklich hätte verrichten müssen. — Im praktischen pflegt die Rechnung so auszusehen:

Divisor	Dividend
72	144 2
48	720 27
4 108	48
50	64 4
2	50
16	
	27 das Resultat.

Oder, wenn 36 . 25 . 49 . 96 durch 42 . 15 . 6 . 18 zu dividiren ist:

Divisor	Dividend
7 42	36 6
3 15	25 5
6	49 7
3 18	96 16
3 . 3 oder 9	5 . 7 . 16 oder 560
9	560 | 62
	54
	20
	18
	2

so daß 62 der gesuchte Quotient ist, sowie 2 der Rest.

Multiplicirte man wirklich die gegebene Reihe von Zahlen, so erhielte man für 36 . 25 . 49 . 64 das Produkt 4233600; für 42 . 15 . 6 . 18 das Produkt 68040, und diese beiden Zahlen dividirt, geben

```
68040 | 4233600 | 62
        408240
        ------
        151200
        136080
        ------
         15120,
```

so daß also derselbe Quotient 62 sich ergiebt, und 15120 als Rest.*)

---

*) Wenn auch dieser Rest ein verschiedener ist, so erkennt man doch, nachdem die Lehre der Brüche zu Hilfe gezogen werden kann, daß auch in dieser Beziehung das Resultat ein und dasselbe ist.

Anmerkung. Kommen auf beiden Seiten Zahlen vor, die zur rechten noch Nullen haben, so kann man auch immer gegen eine Null zur linken eine zur rechten ausstreichen; weil dadurch nichts anders als eine Division mit 10 bewirkt wird.

§. 42.

Wenn zwei Zahlen z. B. 629 und 48 mit einander multiplicirt werden sollen, und man weiß, daß die eine davon 48 aus zwei Faktoren besteht, nämlich 8 und 6, so kann man die Zahl 629 zuerst mit dem einen Faktor 8, dann was herauskommt noch mit dem andern Faktor 6 multipliciren, und erhält dann dasselbe Resultat, nämlich

629		629		629
8	oder	6	statt	48
5032		3774		5032
6		8		2516
30192		30192		30192

Zu 42. Denn es soll erst 8 mit 6, giebt 48, und dies noch mit 629 multiplicirt werden; es ist aber einerlei, in welcher Ordnung man die 3 Zahlen 8, 6 und 629 nimmt, folglich kann man zuerst 629 mit 8 und dann, was herauskommt, noch mit 6 multipliciren.

§. 43.

Dasselbe gilt natürlich auch noch, wenn die eine Zahl in mehr als zwei Faktoren zerlegt werden kann. Ist z. B. 589 mit 96 zu multipliciren, und wird 96 zerfällt in die 3 Faktoren 2.6.8, so erhält man:

589		589		589
2	oder	8	statt	96
1178		4712		3534
6		2		5301
7068		9424		56544
8		6		
56544		56544		

§. 44.

Eben so ist es denn natürlich auch einerlei, ob man eine Zahl z. B. 56544 durch eine Zahl 96 dividirt, oder nach

und nach durch die Faktoren 2, 6, 8, aus denen 96 besteht. Man erhält:

```
8 | 56544 | 7068   dann   6 | 7068 | 1178
      6                        144
```

endlich

```
2 | 1178 | 589   statt   96 | 56544 | 589
     11                        480
                               ----
                                854
                                768
                                ----
                                 864
                                 864
                                 ---
                                 000
```

§. 45.

Es ist daher sehr gut, eine gegebene Zahl in diejenigen Faktoren zerlegen zu können, aus denen sie besteht, d. h. die mit einander multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringen. Man hat hier aber kein anderes Hilfsmittel, als mit einzifrigen Zahlen die Division in die gegebene Zahl zu versuchen, und wenn sie mit irgend einer ohne Rest gelingt, den Quotienten selbst wieder als eine zu zerfällende Zahl zu betrachten, bei der man aufs neue die Division mit den einziffrigen Zahlen versucht. Ist z. B. 4368 zu zerfällen, so nehme man erstlich 4 und dividire, so erhält man $\frac{4368}{4}=1092$ oder $4368=4\,.\,1092$; eben so nehme man nun 6 und dividire in 1092, giebt $\frac{1092}{6}=182$ oder $1092=6\,.\,182$, daher $4368=4\,.\,6\,.\,182$; ferner versuche man nun mit 7 den letzten Quotienten 182 zu dividiren, giebt $\frac{182}{7}=26$, oder $182=7\,.\,26$, folglich $4368=4\,.\,6\,.\,7\,.\,26$, und, da $26=2\,.\,13$ gefunden wird, auch $4368=4\,.\,6\,.\,7\,.\,2\,.\,13$, d. h. die Zahlen 4, 6, 7, 2 und 13 machen die Faktoren von 4368 aus, und geben diese Zahlen allemal, in welcher Ordnung man sie auch mit einander multiplicirt. — Man kann auch öfters, nachdem diese Faktoren gefunden sind, ihre Anzahl noch vermehren,

indem man diejenigen wieder zerfällt, die solches zulassen, oder vermindern, indem man einige der vorhandenen mit einander multiplicirt. So z. B. kann man statt der obigen 4 setzen 2.2 und 2.3 statt 6, und hat dann 4368 = 2.2.2.2.3.7.13; eben so kann man auch obige 4 und 2 mit einander multipliciren, und bekommt dann 4368 = 8.6.7.13.

Zu 45. Der Lehrer lasse sehr viele Zahlen auf diese Art zerfällen, und nachher die Faktoren wieder in verschiedener Ordnung multipliciren, damit die Schüler sich erstlich eine Fertigkeit in diesem Geschäfte erwerben, dann aber auch jedesmal sich bewußt werden, was sie eigentlich hier gethan haben.

§. 46.

Weil man hierbei immer versuchen muß, ob sich eine gegebene Zahl durch eine der einziffrigen Zahlen dividiren läßt, so werden folgende Kennzeichen dabei gute Dienste leisten:

1) Durch 2, 4, 8 sind Zahlen theilbar, wenn ihre letzte Ziffer, oder ihre beiden letzten, oder ihre drei letzten, als Zahlen gelesen, resp. durch 2, 4, 8 theilbar sind. So ist z. B. 5092 durch 2 theilbar, weil die letzte Ziffer 2 durch 2 theilbar ist; 5092 ist aber auch durch 4 theilbar, weil die aus den beiden letzten Ziffern geschriebene Zahl, nämlich 92, durch 4 theilbar ist; endlich ist 5092 nicht durch 8 theilbar, weil die durch die 3 letzten Ziffern 092 ausgedrückte Zahl, d. h. die Zahl 92 nicht durch 8 theilbar ist.
2) Durch 3 oder 9 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre einzelnen Ziffern zusammengezählt eine Zahl geben, die durch 3 oder 9 theilbar ist. Z. B. in 50972304 macht die Summe der Ziffern 30, und weil diese Zahl durch 3 theilbar ist, so kann auch 50972304 durch 3 ohne Rest dividirt werden; weil aber diese Zahl 30 nicht durch 9 theilbar ist, so kann man auch 50972304 nicht durch 9 ohne Rest dividiren.
3) Durch 5 ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer

zur rechten eine 0 oder 5 ist; z. B. 45, 90, 63105, u. s. w.

4) Endlich durch 6 ist eine Zahl theilbar, wenn sie die Kennzeichen der durch 2 und durch 3 theilbaren Zahlen an sich hat, d. h. wenn ihre letzte Ziffer gerade (2, 4, 6 oder 8) und die Summe aller Ziffern durch 3 theilbar ist; z. B. 7023162, 42, 402, 204, u. s. w.

§. 47.

Wenn eine Zahl z. B. 204 durch 6 dividirt werden kann, so wird 204 = 6 mal den Quotienten, d. h. die Zahl 6 gehört unter die Faktoren der Zahl 204. Ueberhaupt ist eine Zahl z. B. 204 durch eine andere z. B. 12 theilbar, sobald die erstere 204 unter ihren Faktoren alle Faktoren der Zahl 12 hat. Man sagt dann, 204 ist ein Vielfaches von 12.

Man kann daher beliebige Vielfache von einer Zahl 12 finden, indem man Zahlen durch Multiplikation aus den Faktoren der Zahl 12 und beliebig anderen zusammensetzt. — Eben so leicht kann man nun auch Zahlen finden, die durch zwei, drei und mehr andere Zahlen ohne Rest dividirt werden können. Soll z. B. eine Zahl gesucht werden, die zugleich durch 12, 15 und 18 theilbar seyn soll, so bedenke man, daß $12 = 2 . 2 . 3$, $15 = 3 . 5$, $18 = 2 . 3 . 3$ ist, und nehme nun eine Menge dieser Faktoren zusammen z. B. $2 . 2 . 3 . 5 . 3$ oder die Zahl 180. Weil diese Zahl die Faktoren 2, 2, 3 hat, so ist sie durch 12 theilbar, weil sie die Faktoren 3 und 5 hat, ist sie auch durch 15 theilbar, endlich, weil sie die Faktoren 2, 3, 3 hat, muß sie auch durch 18 theilbar seyn.

Bei der Division selber kann man die Quotienten sogleich angeben, indem man nach §. 37 dividirt, die Faktoren bloß wegläßt. Also $\frac{180}{12} = \frac{2 . 2 . 3 . 5 . 3}{2 . 2 . 3} = 5 . 3 = 15$; eben so $\frac{180}{15} = \frac{2 . 2 . 3 . 5 . 3}{5 . 3} = 2 . 2 . 3 = 12$; zuletzt $\frac{180}{18} = \frac{2 . 2 . 3 . 5 . 3}{2 . 3 . 3} = 2 . 5 = 10$.

Zu 47. Auch dieses übe man recht praktisch ein; man gebe zu dem Ende viele Fragen dieser Art, z. B. Zahlen zu finden, die durch 8, 14, 21 und 49 zugleich theilbar sind, oder andere zu finden, die durch 12, 27, 50, 9 zugleich sich dividiren lassen, u. dgl.; lasse die gegebenen Zahlen 8, 14, 21 und 49 oder 12, 27, 50 und 9 erst in ihre Faktoren zerfällen, und dann aus diesen Faktoren die gesuchte Zahl zusammensetzen. Man lasse bemerken, daß man unendlich viele solche gemeinschaftliche Vielfache finden kann, sobald eines gefunden ist, indem man dieses eine nur immer noch mit einer beliebigen Zahl multipliciren darf; dagegen giebt es unter allen den vielen eines, welches das kleinste dieser Art ist, so daß jede kleinere Zahl als diese, nicht mehr durch jede der gegebenen Zahlen zugleich dividirt werden kann. Die kleinste ist immer diejenige, welche die wenigstmöglichsten Faktoren enthält; dieses kleinste Vielfache lasse man jedesmal von den Schülern angeben, zu welchem Ende bei dem obigen Zerlegen in Faktoren immer die einfachsten Faktoren gesucht werden müssen, d. h. diejenigen, die selbst nicht mehr zerlegt werden können.

Man kann dasselbe kleinste gemeinschaftliche Vielfache praktisch auch auf folgende Weise finden: Man schreibt die gegebenen Zahlen neben einander hin, und dividirt mit einer der erstern einfachen Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. (4, 6, 8, 9 ꝛc. sind selbst schon durch Multiplikation zusammengesetzt) in alle diejenigen, welche die Division zulassen; doch muß dies wenigstens bei zweien der Fall seyn; den Divisor schreibt man zur linken hin, die Quotienten unter ihre durchgestrichenen Dividenden; dies Verfahren wiederholt man so lange, bis es nicht mehr angeht; zuletzt multiplicirt man die letzten Quotienten und alle Divisoren mit einander, und erhält so das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Die Rechnung für das erste der oben gegebenen Beispiele sieht so aus:

2	8,	~~14~~,	~~21~~,	~~49~~
7	4	~~7~~	3	7
		1		

daher 2.7.4.3.7 d. h. 1176 ist die kleinste Zahl, die sich zugleich durch 8, 14, 21 und 49 ohne Rest dividiren läßt.

Für das zweite Beispiel wird die Rechnung so:

2	12,	27,	50,	9
3	6	9	25	3
3	2	3		1

und es ist daher 2.3.3.2.3.25 oder 2700 das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 12, 27, 50 und 9.

§. 48.

Wenn zwei Zahlen durch einander dividirt werden sollen, und es läßt sich der Dividend in zwei Summanden (Theile) zerlegen, so kann man jeden einzelnen Theil dividiren und die Resultate dann addiren. Ist z. B. 896 durch 16 zu dividiren, und weiß man, daß 896 = 816 + 80 ist, so kann man zuerst 816, dann noch 80 durch 16 dividiren (erstere Division giebt 51, letztere 5), und die beiden Resultate 51 und 5 addirt, geben 56.

§. 49.

Desgleichen, wenn der Dividend aus zwei durch Subtraktion verbundenen Theilen besteht, kann man erst beide einzeln dividiren und dann die Resultate subtrahiren; z. B. da 792 = 800 — 8 ist, so kann man, statt 792 durch 4 zu dividiren, erst 800, dann 8 durch 4 dividiren (ersteres giebt 200, letzteres 2) und die Resultate 200 und 2 von einander subtrahiren, giebt 198.

§. 50.

Umgekehrt soll man zwei oder mehr Zahlen z. B. 7224, 504 und 27936 jede durch eine Zahl z. B. 12 dividiren, und die Resultate dann addiren, so addire man vorher die Zahlen 7224, 504 und 27936, und dividire die Summe auf einmal. Man erhält:

```
         27936     dann  12 | 35664 | 2972
addirt     504                24
addirt    7224                ---
         -----                116
         35664                108
                              ---
                                86
                                84
                                --
                                24
                                24
                                --
                                00
statt
      12 | 27936 | 2328  dann 12 | 504 | 42
            24                     48
           ---                     --
            39                     24
            36                     24
            --                     --
             33                    00
             24
             --
              96
              96
              --
              00
endlich
      12 | 7224 | 602  zuletzt      2328
           72                addirt   42
           --                addirt  602
            24                      ----
            24                      2972
            --
            00.
```

Immer erhält man dasselbe Resultat 2972. Da aber die Divisionen beschwerlich sind, so ist gewöhnlich der erstere Weg viel leichter.

§. 51.

Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn zwei Zahlen 96 und 72 durch eine dritte 12 dividirt und die Quotienten 8 und 6 dann von einander subtrahirt werden sollen; man subtrahirt zuerst die gegebenen Zahlen 96 und 72 von einander und dividirt dann erst diese Differenz 24 durch die Zahl 12; immer erhält man 2 zum Resultat.

§. 52.

Da mit 10, 100, 1000 u. s. w. leicht zu multipliciren und zu dividiren ist, indem man nur so viele Nullen anhän-

gen oder so viele Ziffern abschneiden darf, so ist es öfter bequem, statt mit 5, 25, 50, 75, 125 zu multipliciren, lieber mit 10, 100, 300, 1000 zu multipliciren, und, was herauskommt, noch durch 2, 4, 8 zu dividiren; also 1) statt mit 5 zu multipliciren hängt man eine Null an, und dividirt durch 2; 2) statt mit 25 zu multipliciren hängt man zwei Nullen an, und dividirt hernach durch 4; 3) statt mit 75 zu multipliciren, multiplicirt man mit 3, hängt zwei Nullen an, und dividirt durch 4 (weil $75 = \frac{300}{4}$ ist); 4) statt mit 125 zu multipliciren hängt man drei Nullen an, und dividirt durch 8 (weil $125 = \frac{1000}{8}$ ist) u. s. w. — Aber eben so ist es bequem, statt mit 5, 25, 75, 125 zu dividiren, lieber mit 2, 4, 8 zu multipliciren, und dann eine, zwei, oder drei Ziffern abzuschneiden, also 1) statt durch 5 zu dividiren, multiplicire man mit 2 und schneide eine Ziffer ab (d. h. dividire mit 10); 2) statt durch 25 zu dividiren, multiplicire man mit 4 und schneide dann zwei Ziffern ab; 3) statt durch 75 zu dividiren, multiplicire man mit 4, dividire dann durch 3 und schneide noch 2 Ziffern ab; 4) statt durch 125 zu dividiren multiplicire man mit 8 und schneide 3 Ziffern ab; u. s. w.

Beispiele der ersten Gattung:

```
          479
1) mult.    5     oder    2 | 4790 | 2395
        -----                 11
         2395

          479
2) mult.   25     oder    4 | 47900 | 11975
        -----                 332
         2395
          958
        -----
        11975

          479                 479
3) mult.   75     oder          3
        -----              --------
         2395             4 | 143700 | 35925
         3353                 2312
        -----
        35925
```

```
            479
4) mult.    125     oder   8 | 470000 | 59875
         ------                7764
           2395
           958
          479
         ------
          59875
```

Beispiele der zweiten Gattung:

```
1)   5 | 0873 | 1974      oder     987 3
      4323                            2
                                 --------
                                 1974 |6

2)  25 | 78734 | 3149     oder    787 34
       75                             4
     ------                      ---------
       37                        3149 |36
       25
     ------
       123
       100
     ------
        234
        225
     ------
          9

3)  75 | 98734 | 1316     oder     98734
       75                              4
     ------                    -----------
       237                 3 | 394936| 1316 | 45
       225                      1111
     ------
        123
         75
       ------
         484
         450
       ------
          34

4) 125 | 98734 | 789      oder     98 734
       875                              8
     ------                       ---------
       1123                        789| 872
       1000
     ------
        1234
        1125
      ------
         109
```

Anmerkung. Weiter unten §. 61. werden wir sehen, daß der vollständige Quotient in 1) zur linken $1974\frac{3}{5}$ ist,

zur rechten aber $1974\frac{6}{10}$; daß eben so in 2) der vollständige Quotient zur linken $3149\frac{9}{25}$, zur rechten aber $3149\frac{36}{100}$ in 3) zur linken $1316\frac{34}{75}$, zur rechten aber $1316\frac{45\frac{1}{3}}{100}$ in 4) endlich zur linken $789\frac{109}{125}$, zur rechten aber $789\frac{872}{1000}$ ist. Nach §. 68 aber sind auch diese vollständigen Quotienten zur linken und zur rechten einander gleich.

Kapitel IV.

Von den Brüchen.

§. 53.

Wenn man eine gegebene Einheit (Fuß, Elle, Pfund, Thaler ꝛc.) in mehrere z. B. 8 gleiche Theile theilt, so hat ein jeder dieser Theile eine bestimmte Länge: ein Jeder, der dieselbe Einheit in dieselbe Menge von Theilen theilt, bekommt gerade auch dieselben Theile; sie sind weder größer noch kleiner. Je nachdem man die Einheit in zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht u. s. w. Theile theilt, nennt man jeden einzelnen Theil ein Halbes, oder Drittheil, Viertheil, Fünftheil, Sechstheil, Achttheil u. s. w., und jeder dieser Theile hat eine bestimmte Länge und ist als gegeben anzusehen, wenn das Ganze gegeben ist. Wäre das Ganze z. B. eine Berliner Elle, so würde jeder, der diese Elle hat, sogleich auch die Länge eines Fünftheils dieser Elle haben, weil er sie nur wirklich in 5 gleiche Theile theilen dürfte.

§. 54.

Ist nun ein Stück der Einheit gegeben, so kann dies nicht anders gemessen, d. h. bestimmt werden, als daß man ein kleineres Maas nimmt, und zusieht, wievielmal das gegebene Stück solches enthält. Wollte man z. B. ein Stück Tuch, welches weniger als eine Elle ist, messen, so könnte man es nicht dadurch angeben, daß man sagt, man wolle 1,

2, 3, 4 oder 5 u. s. w. Ellen (denn eine Elle ist ja schon zuviel) sondern man muß solches in kleinerem Maaße verlangen, z. B. sagen, man wolle 7 Zolle Tuch. Da aber allen denen, welche die Elle haben, ein Halbes, Drittheil, Fünftheil oder Achttheil einer Elle eben so bekannte Längen sind, so thut man am besten, das Stück mit einem dieser Theile zu messen z. B. mit dem Achttheil; findet man nun, daß das Stück, welches man will, gerade 5 solcher Achttheile enthält und giebt man diese Bestimmung an, so wird uns der Kaufmann gerade ein solches Stück geben können, indem er vorher seine Elle in 8 Theile theilt, um das Maas zu erhalten (was gewöhnlich schon ein für alle mal geschehen ist) und nun 5 solcher Theile abmißt.

§. 55.

Das Stück dieser Elle würde also hier eigentlich nicht durch eine sondern durch die beiden Zahlen 5 und 8 angegeben. Die eine dieser Zahlen 8 bestimmt, in wieviel Theile das Ganze (die Elle) getheilt werden muß, um das Maas zu erhalten, und die andere Zahl 5 zeigt an, wie viel solcher Theile das Stück enthält. Auf ähnliche Art werden alle Stücke von einem Ganzen durch zwei Zahlen bestimmt und man bezeichnet es dadurch, daß man das Divisionszeichen gebraucht, und die Zahl 8, welche das Maas bestimmt, unten, die andere 5 aber oben hinschreibt. Man schreibt also: Das gegebene Stück sey $\frac{5}{8}$ Elle. Dieser Ausdruck $\frac{5}{8}$ für das gedachte Stück heißt ein Bruch, die obere Zahl 5 sein Zähler, die untere 8 sein Nenner.

Zu 55. Es muß hier begreiflich gemacht werden, daß, was wir hier insbesondere von einer Elle gesagt haben, auch für jede andere Einheit gelten müsse.

§. 56.

Ein Bruch unterscheidet sich also von einer ganzen Zahl nur dadurch, daß das Stück, was er ausdrückt, nicht mit der ganzen Einheit (mit dem Ganzen) sondern mit einem erst durch den Nenner zu bestimmenden Theil des Ganzen gemes-

sen wird. Zuweilen haben diese Theile schon bestimmte Namen, so daß der Theil schon an diesem Namen erkannt wird; dann kann man die Bezeichnung des Bruches ganz weglassen und man hat eine gewöhnliche ganze Zahl. Z. B. Ein Stück Drath, welches kleiner als ein Fuß, ist mit dem zwölften Theil des Fußes gemessen worden, und man fand, daß es diesen Theil gerade 7 mal enthält. Man sagt also, das Stück habe 7 Zwölftheils Fuß oder $\frac{7}{12}$ Fuß. Den zwölften Theil von einem Fuß nennt man aber Zoll, folglich kann man auch sagen: das Stück Drath habe 7 Zolle, und jetzt hat man bloß eine ganze Zahl — Dasselbe Stück Drath werde nun gewogen, es hat kein ganzes Pfund; man nimmt also kleinere Gewichte und zwar zwei und dreißigtheil des Pfundes, und findet, daß 3 solche das Stück aufwiegen. Man sagt also, es wiegt $\frac{3}{32}$ Pfund; aber man kann auch sagen: es wiegt 3 Loth, weil man schon weiß, daß 1 Loth nichts anders ist als 1 zwei und dreißigtheil Pfund. Eben so, weil der Preuß. Thaler 30 Silbergroschen, und der Sgr. wiederum 12 Pfennige hat, so sind $\frac{7}{30}$ Preuß. Thaler mit 7 Sgr.; desgleichen $\frac{5}{12}$ Sgr. mit 5 Pfg. ganz gleichbedeutend *).

§. 57.

Ohneracht et also ein Bruch eigentlich nur eine mit einem kleineren Maaße gemessene ganze Zahl ist, und man ihn daher immer in Form einer ganzen Zahl angeben kann, so findet man es doch für die Rechnung bequem, dergleichen Brüche (d. h. solche Ausdrücke wie $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$ u. s. w.) beizubehalten, und man muß nun erlernen, wie man solche Brüche zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt, so wie wir dies in dem vorhergehenden für die ganzen Zahlen erlernt

---

*) Daß die angezeigte Division $\frac{5}{8}$, als benannte Zahl, etwa auf die Elle als Einheit bezogen, einen Theil der Elle, und zwar den 5 fachen 8ten Theil der Elle von selbst, ausdrücke, sobald man auf $\frac{5}{8}$ alle Gesetze der Quotienten in Anwendung bringt, wird später im mathematischen Vortrage erwiesen hier aber im §. 60. einstweilen anschaulich gemacht.

haben, damit man nirgends, wo addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt werden muß, anstößt, es mögen die vorkommenden Zahlen ganze oder gebrochene Zahlen (Brüche) sein.

§. 58.

Zuerst bemerke man, daß nur gleichartiges d. h. nur solches, was mit einerlei Maas gemessen ist, addirt und subtrahirt werden kann, z. B. 6 Ellen und 4 Ellen giebt 10 Ellen, 9 Pfund weniger 5 Pfund bleiben 4 Pfund u. s. w. Dagegen 6 Ellen und 4 Fuß giebt weder 10 Ellen noch 10 Fuß; 9 Pfund weniger 5 Loth weder 4 Pfund noch 4 Loth. Eben so geben 5 Zwölftheilselle und 2 Zwölftheilselle zusammen 7 Zwölftheilselle; 7 Achttheilsfuß weniger 2 Achttheilsfuß bleiben 5 solche Achttheilsfuß. Dagegen 7 Achttheilselle und 5 Sechstheilselle geben weder 12 Achttheilselle noch 12 Sechstheilselle; eben so geben 2 Drittheilspfund weniger 1 Viertheilspfund, weder 1 Drittheilspfund noch 1 Viertheilspfund. Die Brüche $\frac{5}{12}$ und $\frac{2}{12}$ konnten also addirt werden und gaben $\frac{7}{12}$; eben so konnten die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{2}{8}$ von einander subtrahirt werden, und gaben $\frac{5}{8}$. Dagegen ist es nicht möglich die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$ zu addiren; sie geben weder $\frac{12}{8}$ noch $\frac{12}{6}$; und eben so wenig kann man $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ von einander subtrahiren. Man sieht also, daß nur diejenigen Brüche addirt und subtrahirt werden können, die einerlei Nenner haben, und daß sie dann wie ganze Zahlen behandelt werden, indem man die Zahl im Nenner als das, was sie ist, nämlich als bloße Benennung betrachtet, und nicht mit ihr rechnet, die Zähler addirt oder subtrahirt, je nachdem die Brüche addirt oder subtrahirt werden sollen, den gemeinschaftlichen Nenner aber beibehält. Man findet demnach sogleich z. B. $\frac{7}{8}+\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{14}{8}$; $\frac{9}{16}+\frac{5}{16}=\frac{14}{16}$; $\frac{11}{12}-\frac{5}{12}=\frac{6}{12}$; $\frac{9}{15}-\frac{4}{15}=\frac{5}{15}$; $\frac{27}{144}+\frac{109}{144}+\frac{7}{144}+\frac{137}{144}=\frac{280}{144}$; u. s. w.

§. 59.

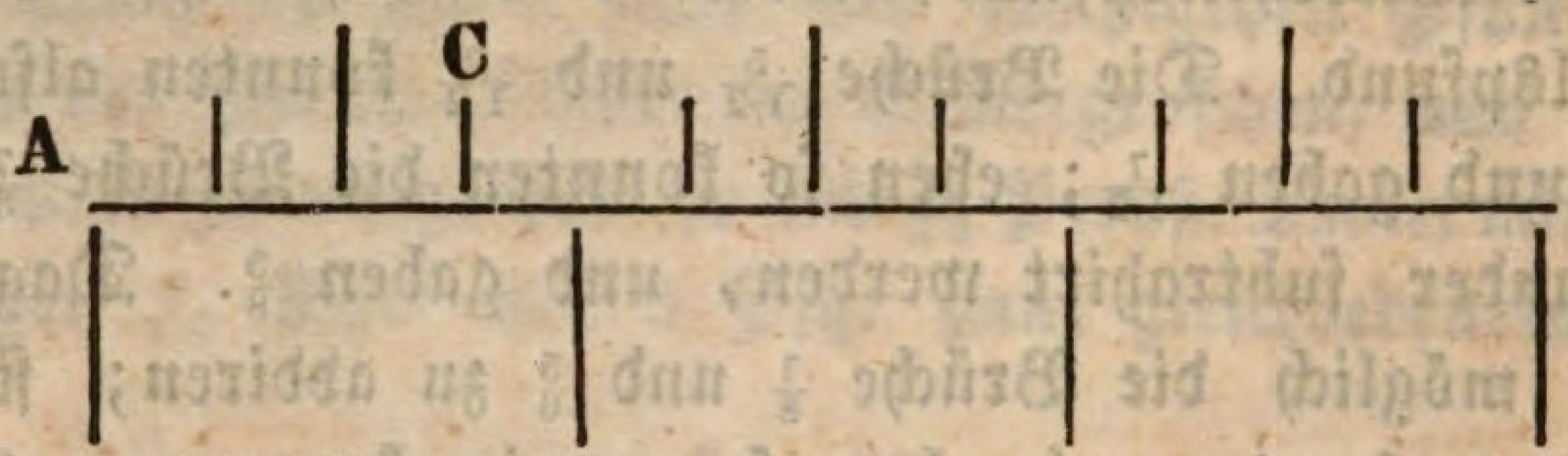
Die zwei ersten Operationen, nämlich Addiren und Subtrahiren, würde man also mit Brüchen ohne weiteres ver-

richten können, wenn die Brüche alle einerlei Nenner hätten. Es fragt sich daher nur noch, ob diejenigen mit verschiedenen Nennern nicht in andere gleichgeltende verwandelt werden können, die einerlei Nenner haben. Wäre dies, so würde man alle Brüche zu einander addiren und von einander subtrahiren können. Wir müssen zu dem Ende die Brüche selbst noch genauer untersuchen, um mit ihren Eigenschaften näher bekannt zu werden.

§. 60.

Diese besonderen Eigenschaften sind im wesentlichen folgende:

I. Ein Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ entsteht, wenn die Zahl 3, die seinen Zähler ausmacht, durch die Zahl 4, die seinen Nenner bestimmt, dividirt wird. — Denn man lege 3 Ellen neben einander, jede in 4 gleiche Theile getheilt:



Sollen nun diese 3 Ellen durch 4 dividirt werden, so sucht man den Theil, der 4 mal genommen die 3 Ellen giebt; dieser Theil ist aber der von A bis C oder 3 Viertheilselle, weil dieser 4 mal genommen 12 Viertheilselle, d. h. alle 3 Ellen zusammen wirklich ausmacht; also ist $\frac{3}{4}$ (d. h. 3 Viertheil) das, was herauskommt, wenn man die Zahl 3 durch 4 dividirt. — Eben so ist $\frac{12}{4}$ Ellen (d. h. 12 Viertheilsellen) so viel, als 12: 4 (oder $\frac{12}{4}$ d. h. 12 durch 4 dividirt) Ellen, nämlich 3 Ellen; desgleichen sind $\frac{24}{6}$ Ellen soviel als 4 Ellen, $\frac{30}{5}$ Schuh soviel als 6 Schuh, $\frac{20}{4}$ ℔ soviel als 5 ℔, u. s. w.

Dies ist der Grund, warum man sich zur Bezeichnung der Brüche des Divisionszeichens bedienen darf; denn, wenn der Bruch etwas anders wäre, als der Quotient der beiden Zahlen, die man Zähler und Nenner nennt, so dürfte man nicht beide mit einerlei Zeichen bezeichnen, weil man beide nicht mit einander verwechseln dürfte.

Wenn daher bei einer Division zweier ganzen Zahlen ein Rest bleibt — z. B. im Falle 507 durch 12 dividirt würde, und der Quotient 42 kommt, dabei aber der Rest 3 bleibt, — so erhält man dadurch erst den vollständigen Quotienten, daß man den Rest 3 abermals durch den Divisor 12 dividirt, diese Division aber bloß anzeigt, also den Bruch $\frac{3}{12}$ daraus macht, und diesen noch zu dem Quotienten 42 addirt, so daß man als vollständiges Resultat der Division $42 + \frac{3}{12}$ oder, wie man dies gewöhnlich schreibt, $42\frac{3}{12}$ erhält, d. h. es ist $\frac{507}{12} = 42\frac{3}{12}$. —

Es soll nämlich 507 in 12 gleiche Theile getheilt werden. Die erste Theilung giebt 42 für jeden Theil; allein es bleiben noch 3 Ganze übrig, die also auch noch in 12 Theile getheilt werden müssen, diese letztere Theilung giebt nun $\frac{3}{12}$ für jeden Theil; also hat man für jeden der 12 gleichen Theile im Ganzen $42\frac{3}{12}$.

So in jedem ähnlichen Falle.

§. 61.

Hieraus folgt:

II. Bleibt bei einer Division (z. B. wenn 39 durch 4 dividirt wird) ein Rest, so erhält man nur dann erst den vollständigen Quotienten, wenn man den Divisor unter den Rest setzt, und diesen Bruch noch zur gefundenen ganzen Zahl hinzunimmt. Der vollständige Quotient ist also hier $9 + \frac{3}{4}$ oder $9\frac{3}{4}$ (wie man es gewöhnlich schreibt). — Denn, wenn man dividiren soll, so soll man nichts anders thun, als die Zahl finden, die 4 mal genommen 39 giebt; 9 viermal genommen giebt aber erst 36, also bleibt der Rest 3 noch zu dividiren übrig, und dieser durch 4 dividirt giebt $\frac{3}{4}$.

Zu 61. Man gebe nochmals mehrere Divisionsbeispiele, bei denen ein Rest bleibt, und lasse jedesmal den vollständigen Quotienten hinschreiben z. B. $\frac{58}{7} = 8\frac{2}{7}$, $\frac{94030647}{6548} = 14360\frac{1367}{6548}$.

§. 62.

Auch folgt hieraus:

III. Jeder Bruch, z. B. $\frac{63}{8}$, dessen Zähler größer ist, als sein Nenner, enthält immer ein oder mehrere Ganze, die man findet, wenn man die Division mit dem Nenner in den Zähler, die der Bruch anzeigt, wirklich verrichtet, z. B. $\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$, $\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$, $\frac{129}{4}=32\frac{1}{1}$, $\frac{97}{5}=19\frac{2}{5}$ u. s. w. Eben so ist $\frac{8}{8}=1$, $\frac{6}{6}=1$, $\frac{9}{9}=1$, $\frac{4}{4}=1$ u. s. w., d. h. jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, ist allemal das Ganze selbst.

§. 63.

Umgekehrt:

IV. Jede ganze Zahl z. B. 7 kann man in einen Bruch mit beliebigem Nenner z. B. in Sechstheile verwandeln, wenn man diese Zahl 7 mit 6 multiplicirt. Man erhält: $7=\frac{42}{6}$, auch $=\frac{35}{5}=\frac{28}{4}=\frac{21}{3}=\frac{14}{2}=\frac{49}{7}=\frac{56}{8}$ u. s w. Denn da 1 Ganzes so viel als 5 Fünftheil ist, $(1=\frac{5}{5})$ so werden 7 Ganze, 7 mal 5 d. h. 35 Fünftheil ausmachen (nämlich $7=\frac{35}{5}$); u. s. w.

§. 64.

Auch:

V. Jede ganze Zahl nebst einem Bruch z. B. $7\frac{2}{3}$ kann man in einen Bruch verwandeln, wenn man die ganze Zahl 7 mit dem Nenner 3 multiplicirt, und dann den Zähler 2 dazu addirt. So hat man $7\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$, $8\frac{3}{1}=\frac{35}{4}$, $19\frac{5}{8}=\frac{157}{8}$, u. s. w. — Denn 7 zu Drittheilen gemacht geben 3.7 d. h. 21 Drittheil, und nun noch die 2 Drittheile hinzugenommen giebt 23 Drittheile oder $\frac{23}{3}$.

§. 65.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als sein Nenner ist, ist also immer weniger als 1 Ganzes, wie z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$ u. s. w., und ein solcher Bruch heißt ein eigentlicher oder ächter

Bruch. — Ein Bruch dagegen, dessen Zähler größer ist, als sein Nenner z. B. $\frac{9}{8}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{129}{16}$ u. s. w. enthält immer 1 oder mehrere Ganze, und es heißt ein *uneigentlicher* oder *unächter* Bruch. — Eine ganze Zahl nebst einem Bruch z. B. $1\frac{1}{8}$, $1\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{16}$ u. s. w. nennt man eine *gemischte Zahl*. — Wenn man (nach vorhergehendem §.) eine gemischte Zahl in einen uneigentlichen Bruch verwandelt, so sagt man: „man bringt die Ganzen unter den Bruch.“ Verwandelt man aber umgekehrt den uneigentlichen Bruch in eine gemischte Zahl (nach §. 62.) so sagt man: „man sucht die Ganzen aus dem Bruche heraus.“

§. 66.

VI. **Ein Bruch und eine ganze Zahl z. B. $\frac{3}{8}$ und 2, werden mit einander multiplicirt auf zweierlei Art:**

1) **entweder, indem man den Zähler allein multiplicirt;** dann erhält man $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{6}{8}$; $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{20}{8}$; $\frac{9}{16} \cdot 8 = \frac{72}{16}$ u. s. w.

2) **oder, indem man den Nenner allein dividirt;** dies giebt $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{2}$, $\frac{9}{16} \cdot 8 = \frac{9}{2}$ u. s. w.

Zu 66. Um das erste einzusehen, bedenke man, daß $\frac{3}{8}$ mit 2 multipliciren nichts anders heißt, als 3 Achttheile 2 mal nehmen, und dies giebt also 2 . 3 oder 6 Achttheile. Um aber das zweite anschaulich zu machen, sage man: Wenn jeder Theil von einer Menge von Theilen doppelt so groß ist, als jeder Theil einer gleichen Menge, so machen auch alle ersten Theile zusammen das doppelte der zweiten Menge aus. Nun ist 1 Viertheil das zweifache von 1 Achttheil, (weil, um Achttheile zu erhalten, man jedes Viertheil noch in zwei Theile theilen muß); folglich ist auch 3 Viertheil das zweifache von 3 Achttheil d. h. $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$. — Man wiederhole dasselbe auch noch für einige andere Brüche z. B. daß $\frac{7}{24} \cdot 4 = \frac{7}{6}$ wird, u. s. w. In diesem letzten gegebenen Falle würde man also dem vorigen zu Folge sagen: Wenn das Ganze in 6 Theile getheilt ist und man will es in 24 Theile theilen, so geschieht dies dadurch, daß man jedes Sechstheil

noch in 4 Theile theilt; 1 Sechstheil ist also das 4 fache von 1 Vierundzwanzigtheil, folglich auch 7 Sechstheil das 4 fache von 7 Vierundzwanzigtheil d. h. $\frac{7}{6} = \frac{7}{24} \cdot 4$.

§. 67.

VII. Ein Bruch z. B. $\frac{8}{9}$ wird durch eine ganze Zahl z. B. 4 dividirt, auf zweierlei Art:

1) indem man den Zähler dividirt, z. B. $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$, $\frac{15}{24} : 5 = \frac{3}{24}$, $\frac{15}{16} : 3 = \frac{5}{16}$ u. s. w.

2) indem man den Nenner multiplicirt z. B. $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{36}$, $\frac{15}{24} : 5 = \frac{15}{120}$, $\frac{15}{16} : 3 = \frac{15}{48}$ u. s. w.

Zu 67. Das erste sieht man auf folgende Art ein: $\frac{2}{9}$ viermal genommen giebt $\frac{8}{9}$, folglich muß $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt $\frac{2}{9}$ geben. — Um das zweite anschaulich zu machen, sage man; $\frac{1}{36}$ ist der vierte Theil von $\frac{1}{9}$ (weil, wenn das Ganze in 9 Theile getheilt ist, man jeden solchen einzelnen Theil noch in 4 Theile theilen muß, sobald das Ganze in 36 Theile zertheilt werden soll); folglich ist auch $\frac{8}{36}$ der vierte Theil von $\frac{8}{9}$ d. h. $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt giebt $\frac{8}{36}$.

Solcher Aufgaben lasse man sehr viele machen, damit in dieser doppelten Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, die nöthige Fertigkeit erworben wird.

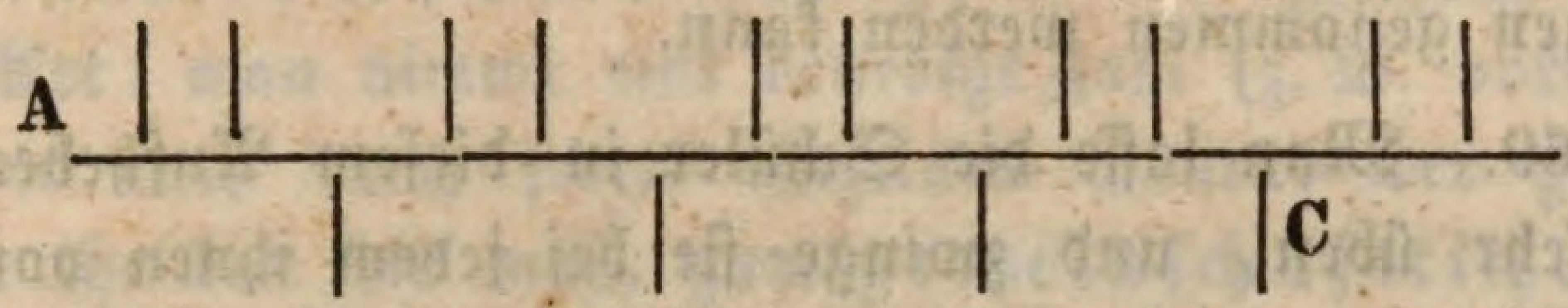
§. 68.

Endlich:

VIII. Ein Bruch z. B. $\frac{9}{15}$ bleibt unverändert, (am Werthe) wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl z. B. 3 zugleich multiplicirt oder zugleich dividirt. Es ist also $\frac{9}{15} = \frac{27}{45}$ oder auch $= \frac{3}{5}$; eben so $\frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{24}{32} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, indem man Zähler und Nenner zugleich bald mit 5, 4, 3 multiplicirt, bald auch durch 2 dividirt. — Denn eine Zahl bleibt dieselbe, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt, dann aber was herauskommt sogleich wieder durch dieselbe Zahl dividirt (§. 32, Nr. 3). Nun giebt aber $\frac{6}{8}$ mit 5 multiplicirt $\frac{30}{8}$, und diese $\frac{30}{8}$ durch 5 dividirt geben $\frac{30}{40}$, folg-

lich ist $\frac{6}{8} = \frac{30}{40}$. — Eben so, wenn man $\frac{6}{8}$ mit 2 multiplicirt, erhält man $\frac{6}{4}$, und diese $\frac{6}{4}$, wieder durch 2 dividirt geben $\frac{3}{4}$; folglich ist $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. (Man erinnere sich, daß man einen Bruch mit einer ganzen Zahl auf zweierlei Art multipliciren, auch auf zweierlei Art dividiren kann).

Zu 68. Man kann dies auf folgende Art noch anschaulicher machen: Man ziehe eine Linie und theile diese in 5 Theile, so hat man von A bis C 4 solche Fünftheile:



d. h. $\frac{4}{5}$ dieser Linie. Theilt man nun jeden einzelnen Theil nochmals in 3 Theile, so wird das Ganze in 15 Theile getheilt und von A bis C sind dann 4 mal 3 d. h. 12 solcher Funfzehntheil; es ist also $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$; so wie nämlich jeder einzelne Theil wieder in 3 Theile getheilt wird, so werden aus den fünf großen Theilen jetzt 3.5 oder 15, und aus den 4 großen Theilen jetzt 3.4 oder 12, d. h. aus $\frac{4}{5}$ jetzt $\frac{12}{15}$, wo man deutlich sieht, daß Zähler und Nenner des Bruches $\frac{4}{5}$ mit 3 multiplicirt worden ist, und werden muß, um das gleiche Stück $\frac{12}{15}$ zu geben. Umgekehrt folgt dann auch, daß wenn man in $\frac{12}{15}$ Zähler und Nenner durch eine und dieselbe Zahl 3 dividirt, das gleiche Stück $\frac{4}{5}$ wieder herauskommt.

Auf dieselbe Art kann man auch alle frühern Sätze mittelst solcher gezogenen und eingetheilten Linien anschaulich machen.

§. 69.

Dieser vorhergehende Satz VIII. ist von großer Wichtigkeit, indem man 1) durch ihn jeden gegebenen Bruch in den möglichst kleinsten Zahlen ausdrücken kann; ein sehr großer Vortheil, da desto leichter zu rechnen ist, je kleiner die Zahlen sind. Das Geschäft: statt gegebener Brüche andere eben so große zu finden, die aber in kleinern Zahlen ausgedrückt sind, nennt man das Aufheben der Brüche, und um es verrichten zu können muß man nur so ohngefähr zu beurtheilen wissen, mit welcher Zahl Zähler und Nenner zugleich sich di-

vidiren lassen, wozu die §. 46. angegebenen Kennzeichen gute Dienste leisten. Ist z. B. gegeben der Bruch $\frac{972}{1296}$, der aufgehoben werden soll, so sieht das Verfahren so aus:

$$\begin{array}{r|r|r|l} 6 & 6 & 9 & \\ 972 & 162 & 27 & 3 \\ \hline 1296 & 216 & 36 & 4 \end{array}$$

so daß also $\frac{3}{4}$ der Bruch ist, welcher dem $\frac{972}{1296}$ gleich, daher für selbigen genommen werden kann.

Zu 69. Man lasse die Schüler in diesem Aufheben der Brüche sehr üben, und zwinge sie bei jedem ihnen vorkommenden Bruch nachzusehen, ob er sich nicht aufheben läßt.

§. 70.

Man kann sich auch dieses Satzes bedienen, um 2) statt gegebener Brüche andere eben so große zu finden, die aber einen andern gegebenen Nenner haben. Ist z. B. der Bruch $\frac{5}{6}$ gegeben und solcher in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner 24 ist, so dividire man mit dem Nenner 6 in den gegebenen Nenner 24, und mit der Zahl 4, die herauskommt, multiplicire man den Zähler und Nenner von $\frac{5}{6}$, so bekommt man $\frac{4 \,.\, 5}{4 \,.\, 6}$ oder $\frac{20}{24}$, welcher Bruch eben so groß als $\frac{5}{6}$ ist, und wirklich den Nenner 24 hat. Wäre noch gegeben der Bruch $\frac{7}{8}$, und auch auf den Nenner 24 zu bringen, so müßte man erstlich mit 8 in 24 dividiren, giebt 3, und mit dieser Zahl 3 Zähler und Nenner von $\frac{7}{8}$ multipliciren; dies giebt $\frac{7 \,.\, 3}{8 \,.\, 3}$ oder $\frac{21}{24}$, welcher Bruch wieder eben so groß als $\frac{7}{8}$ sein muß und dessen Nenner 24 wirklich ist. Eben so, wenn auch die Brüche $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{4}$ gegeben wären und auf den Nenner 24 gebracht werden sollten, muß man Zähler und Nenner des ersten mit 2 (24 durch 12 dividirt giebt 2), dagegen Zähler und Nenner des zweiten mit 6 (24 durch 4 giebt 6) multipliciren; statt $\frac{5}{12}$ erhält man dann $\frac{10}{24}$, statt $\frac{1}{4}$ oder $\frac{6}{24}$. — Statt der 4 Brüche:

$\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$ hat man also jetzt die Brüche $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{10}{24}$, $\frac{6}{24}$, von denen jeder unterstehende gerade so groß als der über

ihm stehende sein muß, eben nach VIII.), die aber alle den Nenner 24 haben.

§. 71.

Das Geschäft: „gegebene Brüche in andere zu verwandeln, die einerlei Nenner haben," nennt man: Brüche unter gleiche Benennung bringen, oder Brüche auf einerlei Nenner bringen. Es geschieht auf folgende Art: man nimmt eine beliebige Zahl (z. B. vorhin 24), die aber auch durch jeden einzelnen Nenner der gegebenen Brüche theilbar sein muß, zum gemeinschaftlichen Nenner an, gewöhnlich der General-Nenner genannt; je kleiner sie gewählt werden kann, desto besser ist es für den gewöhnlichen Gebrauch), dividirt mit jedem Nenner in diesen General-Nenner, und multiplicirt dann mit der Zahl, die herauskommt, den Zähler und Nenner desselben Bruches. Sollen z. B. die Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{16}$ und $\frac{13}{18}$ auf einerlei Benennung gebracht werden, so erhält man folgende Rechnung:

General-Nenner.

144

Gegebene Brüche		144		Gesuchte Brüche.
	$\frac{7}{12}$	12	$\frac{84}{144}$	
	$\frac{5}{9}$	16	$\frac{80}{144}$	
	$\frac{3}{16}$	9	$\frac{27}{144}$	
	$\frac{13}{18}$	8	$\frac{104}{144}$	

wo die mittlern Zahlen 12, 16, 9, 8 entstanden sind, indem man mit den Nennern 12, 9, 16, 18 nach und nach in den General-Nenner dividirte. Mit diesen Zahlen wurden dann die Zähler und Nenner der Brüche links multiplicirt, um die eben so großen Brüche rechts zu erhalten.

§. 72.

Die einzige Schwierigkeit, die hier noch obwalten könnte, wäre die, den General-Nenner zu finden, da dies immer eine Zahl sein muß, in welche man mit jedem Nenner ohne Rest dividiren kann, und die zugleich die kleinste dieser Art ist. Diese Schwierigkeit fällt aber sogleich weg, wenn man sich erinnert, daß man diese Zahl (diesen General-Nenner) schon

in §. 47. zu finden gelernt hat. Für diesen Fall würde man nach jener Angabe folgende Rechnung erhalten:

Die Nenner der gegebenen Brüche.

2	12,	9,	16,	18,
2	6	3	8	9
3	3		4	3
3	1	1		1

folglich der General-Nenner 2.2.3.3.4, oder 144.

Zu 72. In den meisten Fällen braucht man sich diese Mühe gar nicht zu geben, in so ferne man die gesuchte Zahl mit einiger Aufmerksamkeit und Uebung sogleich erkennen kann.

Wären z. B. gegeben die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{8}$, so würde man sogleich sehen, daß hier der General-Nenner 8 ist, daß also der letzte Bruch $\frac{5}{8}$ unverändert bleibt, und nur die beiden ersten auf Achttheile zu bringen sind. — Sind die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ gegeben, so sieht man auch ohne viele Mühe, daß der General-Nenner 12 ist, und findet die Brüche $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{12}$ ohne weiters. — Uebrigens lasse man die Schüler in diesem Geschäfte lange üben, damit sie Fertigkeit darin erlangen. — Es seyen noch auf gleiche Benennung zu bringen 1) die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{9}$; 2) die Brüche $\frac{13}{84}$, $\frac{17}{63}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{27}{28}$; 3) die Brüche $\frac{7}{96}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{32}$.

§. 73.

Man kann nun ganz allgemein zwei beliebige Brüche zu einander addiren und von einander subtrahiren (§. 58 und §. 59). Haben nämlich die Brüche noch nicht gleiche Nenner, so bringt man sie auf gleiche Benennung (nach vorhergehendem §.), addirt oder subtrahirt dann ihre Zähler und behält den gemeinschaftlichen Nenner bei. Um z. B. die Brüche in dem Beispiele (1) zu §. 72) zu addiren, würde man folgende Rechnung erhalten:

2	8,	10,	15,	9
3	4	5	8	3
5		1	1	

folglich ist der General-Nenner 2 . 3 . 5 . 4 . 3 oder 360. Demnach

	360	
$\frac{7}{8}$	45	$\frac{315}{360}$
$\frac{3}{10}$	36	$\frac{108}{360}$
$\frac{8}{15}$	24	$\frac{192}{360}$
$\frac{5}{9}$	40	$\frac{200}{360}$

und nun addirt man die Zähler und erhält:

$$\begin{array}{r} 315 \\ 108 \\ 192 \\ 200 \\ \hline 815 \end{array}$$ und daher

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{10}+\frac{8}{15}+\frac{5}{9}=\frac{815}{360}=2\frac{95}{360}=2\frac{19}{72}.$$

Man pflegt auch bei dem praktischen Verfahren, da wo die Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden, die Nenner rechts, da sie immer dieselben und dem schon oben stehenden General-Nenner gleich sind, gar nicht zu schreiben; dann stehen die Zähler schon unter einander, so daß man ihre Addition sogleich verrichten kann. Die Rechnung steht jetzt so aus:

	360	
$\frac{7}{8}$	45	315
$\frac{3}{10}$	36	108
$\frac{8}{15}$	24	192
$\frac{5}{9}$	40	200
		$\frac{815}{360}$ Summe der gegebenen Brüche.

Für das zweite Beispiel (2) zu §. 72) erhielte man diese Rechnung:

2	84,	63,	21,	28
2	42	21	7	14
3	21	3	1	7
7	7			1
	1			

und den General-Nenner 2.2.3.7.3 oder 252; dann

252		
$\frac{13}{84}$	3	39
$\frac{17}{63}$	4	68
$\frac{8}{21}$	12	96
$\frac{27}{28}$	9	243

$\frac{446}{252}$ Summe der gegebenen Brüche;

d. h. $\frac{13}{84}+\frac{17}{63}+\frac{8}{21}+\frac{27}{28}=\frac{446}{252}=1\frac{194}{252}=1\frac{97}{126}$.

Es sey ferner $\frac{13}{84}$ von $\frac{17}{63}$ zu subtrahiren, so hat man:

3	84, 63
7	28, 21
	4 3

daher den General-Nenner 3.7.4.3 oder 252; nun:

252		
$\frac{17}{63}$	4	68
$\frac{13}{84}$	3	39

$\frac{29}{252}$ die gesuchte Differenz;

d. h. $\frac{17}{63}-\frac{13}{84}=\frac{29}{252}$.

Soll $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{8}$ subtrahirt werden, so ist der General-Nenner 8, die beiden Brüche werden $\frac{6}{8}$ und $\frac{7}{8}$, und von einander subtrahirt, bleibt $\frac{1}{8}$, d. h. $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$. So ist $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$; u. s. w.

Zu 73. Nachdem wir jetzt Brüche addiren und subtrahiren können, dürfen wir nur noch das Multipliciren und Dividiren derselben erlernen. Da aber hier gleichsam ein Ruhepunkt ist, so bemerken wir noch, wie der Lehrer bei dem Vortrag des vorhergehenden zu Werke gehen müsse. Die erste Regel bleibt auch hier, wie vorher schon immer, von keinem §. eher weiter zu gehen, als bis alle Schüler das in dem §. enthaltene nicht nur verstanden, sondern auch die gehörige praktische Uebung darin gehabt haben. Das zweite zu beobachtende ist, daß man die Schüler bei jeder Aufgabe, die sie gelöst haben, allemal fragt, was sie hier eigentlich gethan, was sie gefunden haben, sich die Antworten aber sehr bestimmt geben läßt. So z. B. wenn Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden, und man fragt nach Beendigung des Geschäftes, was sie hier gefunden haben, so

müssen sie antworten: „ich habe Brüche gefunden, die gerade so groß als die gegebenen sind, die aber alle gleiche Nenner haben.“ Auf die Frage: warum sind die gefundenen Brüche gerade so groß als die gegebenen? müssen sie antworten: „weil ich Zähler und Nenner des gegebenen Bruches immer mit einer und derselben Zahl multiplicirt, und (nach VIII. §. 68) eingesehen habe, daß dadurch der Bruch am Werthe unverändert bleibt;“ u. s. f. Endlich möchte auch noch eine öftere Wiederholung dieses Kapitels bis hierher nöthig seyn, ehe man zu den folgenden §§. weiter geht.

§. 74.

IX. **Zwei Brüche z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ werden mit einander multiplicirt, wenn man die Zähler mit einander und auch die Nenner mit einander multiplicirt.** Also $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12}$. Denn $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren heißt nichts anders, als den Bruch $\frac{3}{4}$ nicht 1 mal, sondern nur $\frac{2}{3}$ mal, d. h. ein Drittheil von $\frac{3}{4}$ zweimal nehmen. Der dritte Theil von $\frac{3}{4}$ wird aber gefunden, wenn man $\frac{3}{4}$ durch 3 dividirt, und $\frac{3}{4}$ durch 3 dividirt giebt $\frac{3}{12}$ (§. 67, Nr. 2), also ist $\frac{3}{12}$ der dritte Theil von $\frac{3}{4}$; diesen nun 2 mal genommen giebt $\frac{3}{12} \cdot 2$, d. h. $\frac{6}{12}$ (nach §. 66, Nr. 1); $\frac{6}{12}$ ist also das, was herauskommt, wenn man $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ mal nimmt.

Zu 74. Man kann auf dieselbe Art auch 3 und mehr Brüche mit einander multipliciren; z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2.4.5}{3.5.8} = \frac{40}{120}$, oder $= \frac{1}{3}$. Wenn man also $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ mal und was herauskommt $\frac{5}{8}$ mal nimmt, so erhält man $\frac{1}{3}$. Es ist dabei auch hier wieder einerlei, in welcher Ordnung man multiplicirt; man kann also $\frac{5}{8}$ erst $\frac{2}{3}$ mal nehmen (giebt $\frac{10}{24}$), und dies noch $\frac{4}{5}$ mal ($\frac{10}{24} \cdot \frac{4}{5}$ giebt $\frac{40}{120}$), immer erhält man dasselbe Resultat. — Auch läßt sich hier bei dieser Multiplikation sehr häufig der Satz §. 41 anwenden. Hätte man ihn z. B. auf obige Multiplikation $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}$ angewandt, also statt zu multipliciren blos geschrieben $\frac{2.4.5}{3.5.8}$, so hätte man hier erstlich 5 gegenseitig weglassen, dann oben und unten durch 4 dividiren, und zuletzt noch die 2 gegenseitig weglassen können,

und hätte oben 1 unten aber 3, folglich $\frac{1}{3}$ erhalten, ohne wirklich multipliciren und hernach den Bruch $\frac{40}{120}$ wieder aufheben zu müssen.

§. 75.

Endlich:

X. **Ein Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ wird durch einen andern Bruch z. B. $\frac{2}{5}$ dividirt, wenn man den letztern Bruch $\frac{2}{5}$ (den Divisor) umkehrt, so daß $\frac{5}{2}$ daraus wird, und damit den erstern Bruch $\frac{3}{4}$ (den Dividenden) multiplicirt.** Also $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ giebt $\frac{3}{4} . \frac{5}{2}$ und dieses giebt (nach vorhergehendem §.) $\frac{15}{8}$. — Denn durch $\frac{2}{5}$ dividiren heißt nichts anders, als suchen, wie vielmal $\frac{2}{5}$ genommen werden müsse, um $\frac{3}{4}$ zu geben. Nimmt man aber $\frac{2}{5}$, $\frac{15}{8}$ mal, so erhält man $\frac{30}{40}$, und dies ist wirklich $\frac{3}{4}$, also muß $\frac{15}{8}$ das seyn, was herauskommt, wenn man $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{5}$ dividirt.

Oder man kann auch so sagen: $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{2}$ mal genommen, giebt $\frac{2}{5} . \frac{5}{2} = \frac{10}{10}$ oder 1 Ganzes. Nimmt man also $\frac{3}{4}$ 1 mal, so erhält man $\frac{3}{4} . \frac{5}{2} . \frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{4} . \frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}$ mal genommen; folglich ist $\frac{3}{4} . \frac{5}{2}$ der Quotient, der entsteht, wenn man $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{5}$ dividirt.

Zu 75. So giebt $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} . \frac{4}{3} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}$, d. h. $\frac{3}{4}$ steckt in $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{6}$ mal. Man kann sich auch noch auf folgende Art davon überzeugen. Es ist nämlich $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$ also so viel als $\frac{7}{8} : \frac{6}{8}$, d. h. soviel als 7 Achttheil dividirt durch 6 Achttheil, oder soviel als 7 dividirt durch 6, also $= \frac{7}{6}$ oder $1\frac{1}{6}$; wie vorher auch. Auf diese Art möchte es den Schülern am anschaulichsten werden. Man müßte dabei ohngefähr so verfahren: Es sey $\frac{5}{7}$ durch $\frac{3}{4}$ zu dividiren; man bringe beide Brüche unter gleiche Benennung mit dem General-Nenner 4.7 oder 28, so erhält man statt $\frac{5}{7}$ jetzt $\frac{20}{28}$, statt $\frac{3}{4}$ aber $\frac{21}{28}$ statt $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$ demnach $\frac{20}{28} : \frac{21}{28}$ d. h. 20 Achtundzwanzigtheil dividirt durch 21 Achtundzwanzigtheil, oder 20 dividirt durch 21 d. h. $\frac{20}{21}$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man (nach X.) den Divisor $\frac{3}{4}$ umkehrt und mit diesem $\frac{4}{3}$ den andern Bruch $\frac{5}{7}$ multiplicirt.

§. 76.

Wir können nun Brüche addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, eben so wie ganze Zahlen. Allein es kommen in den Rechnungen nicht bloß Brüche, so wenig als immer ganze Zahlen vor, sondern auch ganze Zahlen und Brüche, sogenannte gemischte Zahlen; folglich muß man auch mit diesen zu arbeiten wissen. — Ein allgemeines immer anwendbares Mittel diesen Zweck zu erreichen, besteht darin, die gemischten Zahlen z. B. $19\frac{2}{3}$ und $27\frac{3}{4}$ immer nach §. 64. in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln (unterm Bruch zu bringen, wo man hier die Brüche $\frac{59}{3}$ und $\frac{111}{4}$ erhält) und mit diesen Brüchen dann zu arbeiten, wie solches in dem vorhergehenden gelehrt wurde.

Ohnerachtet demnach die gemischten Zahlen keine besonderen Regeln erfordern, so thut man doch bei der Addition und Subtraktion derselben am besten, diesen so eben angegebenen Weg nicht zu betreten, sondern die Brüche allein zu addiren oder zu subtrahiren und dann die ganzen Zahlen. Soll also $19\frac{2}{3}$ und $27\frac{3}{4}$ addirt werden, so addirt man erstlich $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ giebt $1\frac{5}{12}$, dann auch die ganzen Zahlen 19 und 27 giebt 46, und erhält daher $47\frac{5}{12}$ als die gesuchte Summe. Soll aber von $27\frac{3}{4}$ die Zahl $19\frac{2}{3}$ subtrahirt werden, so subtrahire man erst $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ bleibt $\frac{1}{12}$, dann noch 19 von 27 bleibt 8, folglich hat man $8\frac{1}{12}$ für den gesuchten Unterschied. Dieselben Resultate hätte man auch erhalten, wenn man im §. 76 die beiden Brüche $\frac{59}{3}$ und $\frac{111}{4}$ addirt oder subtrahirt hätte. Das letztere Verfahren ist aber gewöhnlich weit leichter.

§. 77.

Bei dem Subtrahiren nach letzterer Art kann aber eine Schwierigkeit sich zeigen. Es kann nämlich der Bruch, von dem abgezogen werden soll, kleiner seyn als der andere. Z. B. wenn von $27\frac{2}{5}$ abgezogen werden sollte $19\frac{3}{4}$. Man müßte zuerst den größern Bruch $\frac{3}{4}$ von dem kleinern $\frac{2}{5}$ abziehen, was doch nicht angeht. In diesem Falle muß man immer 1 von den Ganzen mit unter den Bruch $\frac{2}{5}$ bringen;

dann erhält man $\frac{7}{5}$, davon $\frac{3}{4}$ abgezogen bleibt $\frac{13}{20}$; zuletzt zieht man auch die Ganzen ab, vergießt aber nicht, daß die obere Zahl 27 um 1 kleiner ist, weswegen man nun $7\frac{13}{20}$ als Resultat erhält. Die Rechnung sieht im praktischen so aus:

$27\frac{2}{5}$	$\frac{8}{20}$	28
$19\frac{3}{4}$	$\frac{15}{20}$	15
7	$\frac{13}{20}$, daher $7\frac{13}{20}$ die Differenz.	

Zu 78. Was ist $17\frac{1}{4} - 8\frac{2}{3}$? was $29\frac{3}{4} - 17\frac{7}{8}$? was $147\frac{4}{5} - 3\frac{7}{8}$? —

§. 78.

Auch bei dem Multipliciren der gemischten Zahlen kann man außer dem allgemeinen Weg (§. 76) öfter noch mit Vortheil folgenden betreten. Soll nämlich $7\frac{3}{4}$ mit $6\frac{2}{5}$ multiplicirt werden, so kann man $7\frac{3}{4}$ erst 6 mal nehmen, dann noch $\frac{2}{5}$ mal. Man multiplicirt also 7 mit 6, dann $\frac{3}{4}$ mit 6, dann 7 mit $\frac{2}{5}$, endlich $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$; alle Resultate werden zuletzt addirt. Die Rechnung hat dann diese Form:

$7\frac{3}{4}$	
$6\frac{2}{5}$	
42	
$4\frac{1}{2}$	10
$2\frac{4}{5}$	16
$\frac{6}{20}$	6
$49\frac{3}{5}$ weil $\frac{32}{20} = 1\frac{12}{40}$ oder $1\frac{3}{5}$ ist;	

d. h. $49\frac{3}{5}$ ist das gesuchte Produkt. Es giebt nämlich 7 mit 6 multiplicirt 42, 6 mit $\frac{3}{4}$ giebt $\frac{18}{4}$ oder $4\frac{1}{2}$; 7 mit $\frac{2}{5}$ giebt $\frac{14}{5}$ oder $2\frac{4}{5}$, endlich $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$ giebt $\frac{6}{20}$. Nach §. 76 verfahren, würde man dasselbe Resultat erhalten haben; nämlich statt $7\frac{3}{4}$ würde man nehmen $\frac{31}{4}$, statt $6\frac{2}{5}$ aber $\frac{32}{5}$, daher nun $\frac{31}{4}$ mal $\frac{32}{5}$ giebt $\frac{31 \cdot 32}{4 \cdot 5}$, oder (nach §. 41) $\frac{31 \cdot 8}{5} = \frac{248}{5}$ oder $49\frac{3}{5}$.

§. 79.

Jeder Bruch, dessen Nenner 10, 100, 1000, oder irgend ein Produkt aus lauter Zehnern ist, heißt ein Decimalbruch; so z. B. $\frac{107}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{423}{10000}$, $\frac{423}{100}$, $\frac{423}{1000}$, u. s. w.

Die Sätze, die für alle Brüche gelten und die in dem Vorhergehenden mitgetheilt worden sind, gelten natürlich auch für Decimalbrüche; namentlich können also die Regeln, nach denen Brüche addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden, unmittelbar auch bei Decimalbrüchen ihre Anwendung finden, wenn man nur zum Endresultat wirklich wieder einen Decimalbruch erhält. Dies ist bei dem Addiren, Subtrahiren und Multipliciren zweier Decimalbrüche allemal der Fall. Wollte man aber nach dem Verfahren des §. 75 einen Decimalbruch z. B. $\frac{42726}{100000}$ durch einen andern Decimalbruch dividiren z. B. durch $\frac{49}{100}$, so würde man erhalten $\frac{42726}{100000} \cdot \frac{100}{49}$ d. h. $\frac{4272600}{4900000}$ oder $\frac{42726}{49000}$. Dies Resultat wäre nun zwar richtig, aber kein Decimalbruch; letzteren würde man erst erhalten, wenn man in diesem Resultate Zähler und Nenner durch 49 dividiren wollte. Dies gebe die Rechnung

$$
\begin{array}{r|l}
49 & 42726 \mid 871\tfrac{47}{49} \\
 & 392 \\ \hline
 & 352 \\
 & 343 \\ \hline
 & 96 \\
 & 49 \\ \hline
 & 47
\end{array}
$$

und zum Endresultat den Decimalbruch $\frac{871}{1000}$, welcher etwas zu klein ist, während $\frac{872}{1000}$ schon zu groß ist.

Für das Dividiren zweier Decimalbrüche durch einander, ist es daher bequemer, die aus §. 74 leicht abzuleitende Regel anzuwenden, nach welcher Brüche durch einander dividirt werden, wenn man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt. Nach dieser Regel erhält man, wenn z. B. $\frac{42726}{100000}$ durch $\frac{49}{100}$ dividirt werden soll, zunächst $\frac{42726 : 49}{100000 : 100}$,

dann $\frac{871\frac{47}{49}}{1000}$ d. h. zwischen $\frac{871}{1000}$ und $\frac{872}{1000}$.

Man könnte auch daran denken, daß der Bruch $\frac{42726}{100000}$ unverändert bleibt, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl z. B. mit 1000 multiplicirt, wenn man also $\frac{42726000}{100000000}$ darausmacht; dann erhält man,

wenn dieser jetzige Bruch durch $\frac{49}{100}$ nach der vorstehenden Regel dividirt wird, die Rechnung

```
49 | 42726000 | 871959
     392
     ---
      352
      343
      ---
        96
        49
        ---
        470
        441
        ---
         290
         245
         ---
          450
          441
          ---
            9
```

und zum Endresultat $\frac{871959}{1000000}$, welches etwas zu klein ist, während $\frac{871960}{1000000}$ schon zu groß wäre.

Das Wichtigste, was man aber von den Decimalbrüchen zu merken hat, ist die Art und Weise, wie man sie gewöhnlich schreibt. Man schreibt nämlich bloß die Zähler allein, und merkt an letzteren durch ein Komma an, wie viele Nullen der Nenner hatte, nämlich so viele, als rechts vom Komma noch Stellen (Ziffern) zu finden sind.

So schreibt man also

10,7 statt $\frac{107}{10}$ d. h. statt $10\frac{7}{10}$;
0,7 statt $\frac{7}{10}$;
0,0423 statt $\frac{423}{10000}$;
4,23 statt $\frac{423}{100}$ d. h. statt $4\frac{23}{100}$;
0,423 statt $\frac{423}{1000}$;

u. s. w. f.

Dies ist aber alles, was man sich von den Decimalbrüchen zu merken hat.

§. 80.

Zum Beschluß des Kapitels betrachten wir noch eine in der Anwendung sehr häufig vorkommende ganz allgemeine Aufgabe von großer Wichtigkeit. Sie ist folgende: Es sind gegeben zwei Reihen von Zahlen z. B. 10,

$7\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$, 6 und 7, $\frac{3}{4}$, $6\frac{2}{3}$, 9, 24, $\frac{4}{5}$, unter denen nach Belieben ganze, gebrochene und gemischte Zahlen vorkommen; man soll finden, was herauskommt, wenn man die Zahlen in jeder Reihe mit einander multiplicirt, und dann mit dem ersten Produkt in das letztere dividirt. — Wir haben diese Aufgabe schon einmal behandelt und gelöst (§. 41), aber nur für den Fall, daß alle Zahlen ganze Zahlen sind; hier ist sie viel allgemeiner gegeben, da hier die Zahlen nicht bloß ganze, sondern auch gemischte und gebrochene Zahlen seyn können.

Ihre praktische Auflösung ist folgende:

Man schreibe die Zahlen jeder Reihe so unter einander wie im §. 41, und trenne beide Reihen durch einen Vertikalstrich; dann bringe man alle gemischte Zahlen untern Bruch, schreibe statt aller vorkommenden Brüche immer nur die Zähler hin, die Nenner aber jedesmal zu den Zahlen der andern Reihe hinzu; so erhält man in beiden Reihen bloß ganze Zahlen, die man dann mit einander multiplicirt und die Resultate durch einander dividirt, wie solches im §. 41 gelehrt wurde. Die Rechnung wird:

Divisor	Dividend		Divisor	Dividend
10	7		10	7
1	$\frac{3}{4}$		15	3
$\frac{15}{2}$ ~~7~~ -				
~~2~~	~~6~~$\frac{2}{3}$ $\frac{20}{3}$	oder dann	21	20
5				
$\frac{21}{8}$ ~~2~~ -	9		2	9
8				
	24		6	24
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$		4	4
6			3	2
			5	8
				3

und dieses giebt (nach §. 41)

6

5 10	7				10	7		
5 15	3				5 15	3		
3 21	20	4			7 21	20	2	
2	0	3		oder	2	0	3	
2 6	24	12	6		2 6	4		
4	4				4	4		
3	2				3	2		
5	8				5	8		
	3					3		
5.5 od. 25	4.6.8 od. 192				5.5 od. 25	24.8 od. 192		

daher 25 | 192 | 7, also $7\frac{17}{25}$ das gesuchte Resultat.
175
———
17

Zu 80. Gewöhnlich steht die ganze Rechnung so aus:

Divisor			Dividend		
		10	7		
5	15	$7\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	3	
7	21	$2\frac{5}{8}$	2		
			6 -	20	2
	2	$\frac{2}{3}$	3		
	2	6	0	3	
		4	24		
		3	$\frac{4}{8}$	4	
		5	2		
			8		
			3		
		25	192 | $7\frac{17}{25}$		
			175		
			17.		

Hätte man, statt es so zu machen wie hier, wirklich multiplicirt und dividirt, so wie es die Aufgabe verlangte, so hätte man folgende mühsame Rechnung erhalten: Erstlich 10 mal $7\frac{1}{2}$ giebt 75, dies mit $2\frac{5}{8}$ oder $\frac{21}{8}$ giebt $\frac{1575}{8}$, dies wieder mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt giebt $\frac{525}{4}$; endlich dieses mit 6 giebt $\frac{1575}{2}$, das was in der ersten Reihe herauskommt. In der zweiten Reihe erhielte man zuerst 7 mit $\frac{3}{4}$ giebt $\frac{21}{4}$; dies

dann mit $6\frac{2}{3}$ oder $\frac{20}{3}$ multiplicirt, giebt 35; dies noch mit 9 giebt 315, dies wieder mit 24 giebt 7560, zuletzt dieses noch mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt 6048, das Resultat in der zweiten Reihe. Mit dem erstern $\frac{1575}{2}$ muß man nun in das zweite 6048, oder, welches einerlei ist, das zweite 6048 muß nun durch $\frac{1575}{2}$ dividirt werden; dies giebt $6048 : \frac{1575}{2}$ oder $6048 \cdot \frac{2}{1575}$ oder $\frac{12096}{1575}$; wenn man nun wirklich dividirt

$$\begin{array}{r|l|l} 1575 & 12096 & 7 \\ & 11025 & \\ \hline & 1071 & \end{array}$$

so erhält man $7\frac{1071}{1575}$ zum Resultat. Da sich aber der Bruch $\frac{1071}{1575}$ durch 63 aufheben läßt, und den gleichen Bruch $\frac{17}{25}$ giebt, so ist hier das Resultat der ganzen verlangten Operation $7\frac{17}{25}$, wie oben auch. Dabei fällt die Wichtigkeit obiger Abkürzung sogleich in die Augen.

Daß obige Verfahrungsart allemal das richtige Resultat liefern müsse, kann man den Schülern auf folgende Weise anschaulich machen. Man lasse nochmals wiederholen a) daß $7\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{15}{2}$, $2\frac{5}{8}$ so viel als $\frac{21}{8}$, $6\frac{2}{3}$ so viel als $\frac{20}{3}$ ist u. s. w.; b) daß $\frac{15}{2}$ mit 2 multiplicirt 15, $\frac{21}{8}$ mit 8 multiplicirt 21 giebt; daß $\frac{2}{3}$ mal 3 die Zahl 2, $\frac{3}{4}$ mal 4 die Zahl 3, $\frac{20}{3}$ mal 3 die Zahl 20, $\frac{4}{5}$ mal 5 die Zahl 4 hervorbringt, überhaupt, daß ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt allemal den Zähler giebt; c) daß man immer denselben Quotienten erhält, wenn man auch vor der Division den Divisor und den Dividenden noch mit einer und derselben Zahl multiplicirt; d) daß in einer solchen Division, wo die Faktoren des Divisors und des Dividenden unter einander geschrieben stehen, der Divisor oder der Dividend mit einer beliebigen Zahl z. B. 4 multiplicirt ist, so bald man nur diese Zahl 4 als Faktor noch hinschreibt, weil dies so viel bedeutet, als daß nicht bloß alle anderen Zahlen mit einander, sondern was herauskommt, auch noch mit dieser Zahl 4 multiplicirt werden soll. — Nachdem man den Schülern diese Sätze zu-

rückgerufen und nochmals durch mehrere Beispiele erläutert hat, so zeige man ihnen, daß man bei obiger Verfahrungsweise nichts anders gethan habe, als diese Sätze in Anwendung gebracht. Indem man nämlich z. B. statt des Bruches $\frac{3}{4}$ zur rechten, bloß den Zähler 3 hinschreibt, hat man mit 4 multiplicirt, weil $\frac{3}{4}.4$ die Zahl 3 giebt; indem man aber den Nenner 4 zur linken unten hinsetzt, hat man auch den Divisor mit derselben Zahl 4 multiplicirt, und ist der Dividend und Divisor mit einer und derselben Zahl multiplicirt worden, so bleibt der Quotient derselbe als vorher. Dasselbe geschieht nun auch, wenn man z. B. statt des Bruches $\frac{21}{8}$ zur linken bloß 21 hinschreibt, den Nenner 8 aber in die Reihe rechts unten hinsetzt. Es ist also einerlei, ob man die Zahlen 10, $7\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$ und 6, dann auch 7, $\frac{3}{4}$, $6\frac{2}{3}$, 9, 24, $\frac{4}{5}$ mit einander multiplicirt, und mit dem erstern Resultat in letzteres dividirt, oder ob man die ganzen Zahlen 10, 15, 21, 2, 6, 4, 3, 5, dann auch 7, 3, 20, 9, 24, 4, 2, 8, 3 mit einander multiplicirt und dann hier mit dem erstern Produkt in letzteres dividirt. Daß, und wie und warum man aber dieses letztere Geschäft, wo bloß ganze Zahlen vorkommen, abkürzen könne, ist früher schon (im §. 41) hinlänglich deutlich und anschaulich gemacht worden.

In so ferne übrigens auf diese Aufgabe die meisten der unter dem Namen der Regula de tri, Regula de quinque, Regula de septem ꝛc., oder allgemein der Kettenregel u. s. w. aufgestellten Regeln zur Lösung der im Leben vorkommenden Aufgaben zurückgebracht werden können, ist es besonders nöthig, von dieser Aufgabe sehr viele Beispiele anzugeben und bearbeiten zu lassen, und zwar wird es gut seyn, bei einer jeden erst die einzelnen Produkte im Divisor- und Dividenden-Fache finden, und beide wirklich durch einander dividiren, dann aber erst statt dieses mühsamen Geschäftes die im §. angegebene Methode anwenden zu lassen. Die Arbeit selbst wird den Schülern Gelegenheit geben, sich in zusammengesetzten Rechnungen Fertigkeit zu verschaffen, und die Uebereinstimmung der Resultate auf zwei Wegen, die so verschieden zu seyn scheinen, wird sie für ihre Mühe hinlänglich belohnen,

und als das sicherste Aufmunterungsmittel zur eifrigen Fortsetzung dieser Arbeiten zu betrachten seyn.

§. 81.

Noch können wir nicht unterlassen, einer besondern Gattung von Brüchen zu erwähnen, die zuweilen vorkommen können, und die man Bruchsbrüche oder gebrochene Brüche nennt; dies sind aber solche Brüche, deren Zähler oder Nenner selber wieder Brüche enthalten, z. B. ein halb Viertheil $\frac{(\frac{1}{2})}{4}$, oder $2\frac{1}{2}$ Drittheil $\frac{(2\frac{1}{2})}{3}$ u. s. w. Um sie in gewöhnliche Brüche zu verwandeln, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, bemerke man

1) daß entweder der Nenner eine ganze Zahl, der Zähler aber eine gebrochene, oder gemischte Zahl ist, z. B. $\frac{(\frac{1}{2})}{4}$, $\frac{(2\frac{1}{2})}{3}$, $\frac{(1\frac{7}{8})}{2}$ u. s. w.; diese sind die gewöhnlich vorkommenden;
2) oder daß der Nenner eine gebrochene oder gemischte, der Zähler aber eine ganze, gebrochene oder gemischte Zahl ist, z. B. $\frac{4}{(\frac{2}{3})}$, $\frac{4}{(3\frac{1}{2})}$, $\frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{3}{4})}$, $\frac{(\frac{3}{5})}{(2\frac{1}{3})}$, $\frac{(1\frac{3}{4})}{(\frac{4}{5})}$, $\frac{(2\frac{1}{3})}{(3\frac{2}{5})}$ u. s. w.

In beiden Fällen kann man aber die vorkommenden gemischten Zahlen in gebrochene verwandeln (untern Bruch bringen), so daß dann nur folgende zwei Fälle vorkommen können:

1) entweder es ist, wie dies am gewöhnlichsten vorkommt, der Nenner eine ganze Zahl und der Zähler ein Bruch, z. B. $\frac{(\frac{12}{5})}{4}$;
2) oder es ist der Nenner ein Bruch, der Zähler aber eine ganze Zahl oder ein Bruch, z. B. $\frac{4}{(\frac{5}{6})}$, $\frac{(\frac{4}{3})}{(\frac{7}{8})}$.

Da aber jeder Bruch nichts anders anzeigt, als daß man mit dem Nenner in den Zähler dividiren soll, so darf man dies nur wirklich thun, und zwar im ersten Falle nach §. 67, indem man den Zähler 12 des obern Bruches $\frac{12}{5}$ unverändert

läßt, den Nenner 5 aber mit der untern ganzen Zahl 4 multiplicirt; man erhält dann $\frac{12}{20}$ statt $\frac{(\frac{12}{5})}{4}$, oder, indem man den Zähler 12 durch die Zahl 4 dividirt, den Nenner 5 aber unverändert läßt, $\frac{3}{5}$; beide Resultate sind gleich. Im zweiten Falle muß die Division nach §. 75 geschehen, indem man den untern Bruch $\frac{5}{6}$ oder $\frac{7}{8}$ umkehrt, giebt $\frac{6}{5}$ oder $\frac{8}{7}$, und damit die obere Zahl 4 oder $\frac{4}{3}$ multiplicirt, man erhält so $4 . \frac{6}{5}$ oder $\frac{24}{5}$ statt $\frac{4}{(\frac{5}{6})}$, und $\frac{4}{3} . \frac{8}{7}$ oder $\frac{32}{12}$ statt $\frac{(\frac{4}{3})}{(\frac{7}{8})}$. (Das Multipliciren geschieht nämlich entweder nach §. 66 oder nach §. 74.

Zu 81. Diese Bruchsbrüche kommen gewöhnlich bei Reduktionen einer mehrfach benannten Zahl auf die höchste Einheit vor; hat man z. B. 2 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf. und will man das ganze auf die Einheit Thaler reduciren, so erhält man statt 8 Pf. jetzt $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Sgr.; daher hat man dann $10\frac{2}{3}$ Sgr. oder $\frac{32}{3}$ Sgr.; diese auf Thaler gemacht, indem man durch 30 dividirt, geben $\frac{10\frac{2}{3}}{30}$ oder $\frac{(\frac{32}{3})}{30}$ oder $\frac{32}{90}$ Thlr. Die benannte Zahl 2 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf. auf Thaler reducirt giebt daher $2\frac{16}{45}$ Thaler. — Man hätte freilich den Bruchsbruch vermeiden können, wenn man die 10 Sgr. gleich auf Pfennige gebracht hätte; sie machen mit den 8 Pf. zusammen 128 Pf. aus. Da nun der Thaler 360 Pf. hat, so muß man diese 128 Pf. durch 360 dividiren um Thaler zu erhalten, und bekommt $\frac{128}{360}$ oder, aufgehoben mit 8, $\frac{16}{45}$ Thlr. wie vorher auch; allein der erstere Weg ist gewöhnlich vorzuziehen.

Anmerkung. Bei allen Aufgaben, die durch unsere gewöhnliche Rechenkunst gelöst werden können, kommen nie andere Zahlen vor, als ganze, gebrochene und gemischte; auch kommen nie andere Operationen vor, als: solche ganze oder gebrochene oder gemischte Zahlen 1) zu einander zu addiren, oder 2) von einander zu subtrahiren, 3) mit einander zu multipliciren, oder 4) durch einander zu dividiren. Da nun im vorhergehenden jedes dieser vorkommenden Geschäfte

gezeigt worden ist, so enthält das bisher vorgetragene alles, was nur immer in unserer Rechenkunst vorkommen kann, so daß man sich nur und allein mit diesem recht gehörig vertraut machen muß, um alle Rechnungen ausführen zu können, die gewöhnlich im Leben vorkommen und in der Rechenkunst behandelt werden. Es bleibt daher nur noch das eine übrig, nämlich: wenn eine Aufgabe gegeben ist, wo also immer Zahlen gegeben seyn müssen, aus denen eine oder mehrere neue Zahlen gesucht werden sollen, jedesmal aus der Natur dieser Aufgaben mit Bestimmtheit schließen zu können, welche von den gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt, welche durch einander dividirt, welche addirt, welche subtrahirt werden müssen, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Weiß man nämlich, was zu thun ist, so hält uns nichts ab, es auch wirklich zu thun, weil wir in dem vorhergehenden immer schon gelernt haben, wie wir es thun müssen. — Diese Untersuchung nun, was immer zu thun sey, ist in dem folgenden enthalten, und macht die Lehre der benannten Zahlen im weitesten Umfange aus, die dann alle in der Rechenkunst bekannten Regeln in sich schließt.

Kapitel V.

Von der Reduktion, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division benannter Zahlen.

§. 82.

Die Größen-Ausdrücke 6 Pfund, 7 Thaler, 4 Centner, 8 Groschen u. s. w. heißen benannte Zahlen, während die Zahlen 6, 7, 4, 8 u. s. w. bei denen man nicht weiß, ob es Pfunde oder Thaler, Centner oder Groschen sind, unbenannte Zahlen genannt werden; der Centner, Thaler, Pfund, Groschen ꝛc. heißt die Einheit oder Benennung. — Die benannten Zahlen sind 1) einfach be-

nannt, wie z. B. 7 ℔, oder 16 Sgr., oder 12 ℔ u. s. w.; 2) mehrfach benannt, wie z. B. 6 Thlr. 14 Sgr., oder 7 ℔ 23 Loth 3 Quentchen u. s. w. Ferner sind sie wieder 1) gleichbenannt, z. B. 7 ℔ und 5 ℔, 8 Thlr. und 5 Thlr., 5 Fl. 15 Kr. 2 Pf. und 19 Fl. 6 Kr. 1 Pf. u. s. w.; 2) ungleichbenannt, z B. 9 ℔ und 9 Loth, 4 Thlr. und 7 Fl., 6 Thlr. 17 Sgr. und 6 Fl. 17 Kr. u. s. w.

§. 83.

Die Kenntniß der Einheiten, ihrer Eintheilungen, sowie überhaupt die Kenntniß der Dinge, womit es die Aufgabe zu thun hat, wird immer vorausgesetzt, und es ist nicht Sache der Rechenkunst, sie beizubringen; man muß sich solche bei jeder einzelnen Aufgabe besonders verschaffen. — Nichts desto weniger ist es gut, wenigstens die am häufigsten vorkommenden Einheiten gleich angegeben zu finden, und daher wollen auch wir von diesen, aber nur von diesen allein, eine kurze Uebersicht geben.

§. 84.

Die vorkommenden Einheiten lassen sich im wesentlichen auf folgende 5 Arten zurückbringen: 1) Geldeinheiten, 2) Raumeinheiten (Längen-, Flächen-, Körper-Maaße), 3) Zeiteinheiten, 4) Gewichteinheiten, 5) Einheiten bloß gezählter Dinge.

Was nun I. die Geldeinheiten betrifft, so muß man unterscheiden: 1) Rechnungsgeld, Geld wonach Buch und Rechnung geführt wird; 2) geprägtes Geld.

In den Zollvereins-Staaten hat man jetzt, mit wenigen und unbedeutenden Ausnahmen, nur zweierlei Geldeintheilungen; nämlich den Thaler, von welchen 14 aus der feinen Mark Silber geprägt werden, und den (Vereins-) Gulden (Florin, Fl.), von welchen $24\frac{1}{2}$ aus der feinen Mark geprägt werden. Es ist daher genau

$$14 \text{ Thlr.} = 24\tfrac{1}{2} \text{ Fl.}$$

oder

$$4 \text{ Thlr.} = 7 \text{ Fl.}$$

Der Thaler wird in 30 Groschen eingetheilt, welche im Königreich Sachsen Neugroschen, in der Preußischen Monarchie, sowie im Churfürstenthum Hessen und den meisten übrigen nach Thalern rechnenden Zollvereins-Staaten dagegen Silbergroschen genannt werden. — Der Groschen endlich wird wieder in 12 Pfennige getheilt, mit Ausnahme des Königreichs Sachsen, wo 1 Pfennig mehr, nämlich der zehnte Theil des Groschen ist.

Im Königreich Sachsen ist also

1 Thlr. = 30 Neugroschen = 300 Pf.

In der Preußischen Monarchie, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ist dagegen

1 Thlr. = 30 Silbergroschen = 360 Pf.

Der (Vereins-) Gulden wird in 60 Kreuzer, der Kreuzer wieder in 4 Pfennige getheilt, so daß man hat

1 Fl. = 60 Kr. = 240 Pf.

Vergleicht man diese beiden Geld-Einheiten mit einander, so findet man genau

1 Thlr. Preuß. = $1\frac{3}{4}$ Fl. = 1 Fl. 45 Kr.

1 Silber- oder Neugroschen = $3\frac{1}{2}$ Kr. = 3 Kr. 2 Pf.

5 Pf. Sächs. = 6 Pf. Preuß. = $1\frac{3}{4}$ Kr.

Umgekehrt ist

1 Fl. = $\frac{4}{7}$ Thlr. = $17\frac{1}{7}$ Silber- oder Neugroschen.

10 Fl. = $5\frac{5}{7}$ Thlr. = 5 Thlr. 21 Sgr.

Dieser (Vereins-) Gulden wird häufig der rheinische Gulden genannt, obgleich der alte rheinische Gulden, nach welchem in den meisten südlicheren und südwestlichen deutschen Staaten gerechnet wurde, etwas größer ist, weil deren nur 24 aus der feinen Mark geprägt worden sind, so daß genau genommen

48 rhn. Fl. = 49 (Vereins-) Gulden

sind. Im gewöhnlichen Verkehr versteht man aber jetzt diesen letzteren unter dem rheinischen Gulden, weil der alte rheinische Gulden gar nicht mehr vorkommt.

In wenigen kleinen Staaten des Zollvereins rechnet man noch den Thaler zu 24 (gute) Groschen (gGr.) und den Groschen zu 12 Pfennigen, so daß der Thaler dann 288 Pfennige hat. Diese Rechnung findet sich auch in den Königreichen

Sachsen, Preußen, sowie in mehreren andern Zollvereins=Staaten noch, obgleich ungesetzlicher Weise, namentlich bei Handwerkern, im Verkehr, wird jedoch mit jedem Jahre weniger benützt. In diesem Verkehr hört man auch in den nach Thalern rechnenden Staaten von Gulden zu $\frac{2}{3}$ Thlr., und in der Provinz Preußen (jenseits der Weichsel) von (Preuß.) Gulden zu $\frac{1}{3}$ Thlr., sowie von Polnischen Gulden zu $\frac{1}{6}$ Thlr.

Und eben so spricht man in den nach rheinischen Gulden rechnenden Staaten auch von (leichten) Thalern zu $1\frac{1}{2}$ Fl., sowie von Groschen zu 3 Kr., so daß 1 (leichter) Thaler ebenfalls 30 (leichte) Groschen hat.

In den österreichischen Staaten endlich hat man den Gulden Münze, von welchem 20 auf die feine Mark gehen, so daß

40 Fl. Münze = 48 Fl. rhn. = 49 Fl. (Vereins=),
oder 5 Fl. Münze = 6 Fl. rhn. (alte rhn. Fl.)

sind. Dieser Fl. Münze wird wieder in 60 Kr. Münze, und der letztere in 4 Pf. Münze getheilt, so daß auch

5 Kr. Münze = 6 Kr. rhn.

sind. — In denselben Staaten wird im gewöhnlichen kleineren Verkehr nach Rheingeld oder Wiener Währung gerechnet, so daß der Fl. rhn. = 60 Kr. rhn., und der Kr. rhn. = 4 Pf. rhn. hat, während schon seit einer Reihe von Jahren

1 Fl. Münze zu $2\frac{1}{2}$ Fl. rhn.

also auch 1 Kr. Münze zu $2\frac{1}{2}$ Kr. rhn. gerechnet wird.

§. 85.

Hinsichtlich II. der Raumeinheiten bemerken wir

a) von den Längenmaaßen, die Elle und den Schuh oder Fuß. Die Elle wird getheilt in 2 halbe, 3 Dritttheil, 4 Viertheil, 6 Sechstheil, 8 Achttheil und 16 Sechzentheil; der Fuß aber in 12 Zolle und der Zoll in 12 Linien. Außerdem kommen wohl auch noch Ruthen vor zu 12 Fuß, und Klaftern zu 6 Fuß;

b) von den Flächenmaaßen, im Preußischen die Hufe, den Morgen und die Quadratruthe. Die Ruthe zu 12 Fuß gerechnet, hat die Quadratruthe 144 Quadratfuß, und (im Magdeburger Feldmaaß) der Morgen (sogenannte kleine Morgen) 180 Brandenburgische Quadratruthen, die Hufe aber 30 Morgen. In Bayern dagegen hat das Juchert 400 bayer. Quadratruthen (vergl. den Anhang);

c) von den Körpermaaßen, das Getreidemaas, Weinmaas und Biermaas; es ist nämlich im Preußischen

Winspel.	Malter.	Scheffel.	Viertel.	Metzen.	Mäschen oder Viertels-Metzen.
1	2	24	96	384	1536
	1	12	48	192	768
		1	4	16	64
			1	4	16
				1	4

Bei dem Weinmaaße:

Fuder.	Oxhoft.	Ohm.	Eimer.	Ancker.	Quart.	Oeßel.
1	4	6	12	24	768	1536
	1	1½	3	6	192	384
		1	2	4	128	256
			1	2	64	128
				1	32	64
					1	2

Bei dem Biermaaße:

Gebräude.	Kuren.	Faß.	Tonne.	Oehmchen.	Quart.	Oeßel.
1	9	18	36	144	3456	6912
	1	2	4	16	384	768
		1	2	8	192	384
			1	4	96	192
				1	24	48
					1	2

In Bayern dagegen hat

1 Eimer 60 bayer. Maaße

sowohl Wein als Bier, und es sind

100000 berl. Quart = 109478 bayer. Maaße

oder nahe

10 berl. Quart = 11 bayer. Maaße.

§. 86.

III. Zeit-Maaß.

Man nimmt gewöhnlich im Rechnen folgende Eintheilung an: 1 Jahr hat 12 Monat oder 52 Wochen, 1 Monat 30 Tage, 1 Woche 7 Tage. Der Tag hat 24 Stunden, die Stunde 60 Minuten, die Minute 60 Secunden.

§. 87.

IV. Gewicht-Eintheilung im Preußischen.

Berliner Handelsgewicht.

Pf. ℔	Mark. Mrk.	Unzen. ℥j	Loth. Lth.	Quentchen. Qu.	Pfennig. Pfg.	Heller.
1	2	16	32	128	512	2024
	1	8	16	64	256	512
		1	2	8	32	64
			1	4	16	32
				1	4	8
					1	2

Bei größerem Gewicht.

Centner.	Schwere Stein.	Leichte Stein.	Pf. Handelsgewicht.
1	5	10	100
	1	2	22
		1	11

Schiffsgewichte.

Last.	Schiffspfund.	Lispfund.	Pf. Handelsgewicht.
1	12	240	3360
	1	20	280
		1	14

Berliner oder Nürnberger Medicinalgewicht.

Pfund. ℔	Unze. ℥j	Drachmen. ʒj	Scrupel. ℈j	Gran. Gr.	cölln. Richtpf.
1	12	96	288	576	100224
	1	8	24	480	8352
		1	3	60	1044
			1	20	348
				1	$17\frac{2}{5}$

In Bayern*) ist die Eintheilung des Pfundes in seine Unterabtheilungen dieselbe wie im Preußischen; es hat aber der bayer. Centner nur 100 bayer. Pfunde; und es sind dabei

100000 Preuß. Ctr. = 92034 bayer. Ctr.

100000 Preuß. ℔ = 83667 bayer. ℔,

oder 5 bayer. ℔ ziemlich nahe 6 Preuß. ℔.

§. 88.

V. Bloß gezählte Dinge.

a) Bei Papier:

1 Ballen hat 10 Rieß, 1 Rieß 20 Buch und 1 Buch Schreibpapier 24 Bogen, Druckpapier aber 25 Bogen.

b) Bei andern Dingen:

1 Schock sind 60 Stück, 1 halb Schock 30 Stück, 1 Mandel 15 Stück, 1 Dutzend 12 Stück und 1 Dechen 10 Stück.

§. 89.

Für das Reduciren hat man nur folgende 2 Regeln zu merken:

1) Eine Zahl höherer Einheiten wird auf niedrigere gebracht, wenn man selbige mit der Verhältniß-Zahl der Einheiten multiplicirt; es mag übrigens die gegebene Zahl eine ganze, gebrochene oder gemischte Zahl seyn.

---

*) Für das Königreich Bayern und mehrere andere Länder, namentlich die Zollvereins-Staaten, sehe man den Anhang.

z. B. 4 Thlr. machen 4 mal 24 oder 96 gGr. oder 4 mal 30 d. h. 120 Sgr.; $\frac{3}{4}$ ℔ machen $\frac{3}{4}$ mal 32 Loth, oder [da $\frac{3}{4}.32$ (nach §. 66) $\frac{3 \cdot 32}{4}$ oder $\frac{96}{4}$ ist], 24 Loth; ferner machen $4\frac{2}{3}$ Thlr. soviel als $4\frac{2}{3}$ mal 30 Sgr. oder (4 mal 30 giebt 120, und $\frac{2}{3}$ mal 30 giebt (nach §.66) 20, also zusammen) 140 Sgr.; ferner machen 5 Fl. so viel als 5 mal 60 d. h. 300 Kr., u. s. w. f.

2) Eine Zahl niedrigerer Einheiten wird auf höhere Einheiten gebracht, wenn man selbige durch die Verhältnißzahlen der Einheiten dividirt, es mag die gegebene Zahl eine ganze, gebrochene oder gemischte Zahl seyn, und sie mag kleiner oder größer seyn als die Verhältnißzahl, durch welche man dividirt.

Wo die Division nicht statt finden kann, wird sie nämlich bloß angezeigt, und man erhält dann einen Bruch: z. B. 96 gGr. auf Thlr. zu bringen; giebt $\frac{96}{24}$ Thlr. oder 4 Thlr.; sollen 24 Loth zu Pfunden gemacht werden, so erhält man $\frac{24}{32}$ ℔ oder, wenn man diesen Bruch mit 8 aufhebt (§. 68), $\frac{3}{4}$ ℔; sollten endlich 140 kr. zu Gulden gebracht werden, so müßte man mit 60 dividiren und erhielte $\frac{140}{60}$ oder $2\frac{20}{60}$ fl. oder $2\frac{1}{3}$ fl. In diesem letztern Falle könnte man auch bei der Division mit 60 den Rest 20, welcher Kreuzer anzeigt, lassen wie er ist, und erhielte dann 2 fl. 20 kr.

Zu 89. Der Lehrer kann dies anschaulich machen, indem er sagt: jeder einzelne Thaler hat 24 gGr., also 4 Thlr., 4 mal 24 gGr. — Umgekehrt: Da 24 gGr. 1 Thlr. ausmachen, so wird die Zahl, die angiebt, wie viel mal 24 gGr. genommen werden müssen, um 96 gGr. zu geben, die gesuchte Zahl der Thaler seyn; diese erhält man aber, wenn man mit 24 in 96 dividirt.

Hier fange man an, zum Theil bloß Aufgaben vorzulegen und zu fragen, was man zu thun habe, um sie zu lösen; ist dies beantwortet, so lasse man die Rechnung selbst (das Multipliciren, das Dividiren nämlich, in sofern angenommen wird, daß die Schüler schon solches vorläufig verrichten, ehe

sie hierher kommen) nicht wirklich ausarbeiten, sondern gehe sogleich zu einer neuen Frage der Art über. Ich sage, daß man zum Theil, z. B. die Hälfte der Fragen bloß so behandeln solle, halte es aber gar nicht für überflüßig, sondern auch für nöthig, wirkliche Ausrechnungen ebenfalls statt finden zu lassen, so daß auf beide Uebungen ohngefähr gleich viel Zeit verwandt wird.

§. 90.

Sollen mehrfach benannte Zahlen z. B. 4 Thlr. 16 gGr. in einfach benannte Zahlen z. B. bloß in Thlr. oder bloß in gGr. verwandelt werden, so muß man

1) im Falle sie auf die höchste Einheit (Thlr.) gebracht werden sollen, die niedrigeren Einheiten 16 gGr. zu Thlr. machen und zu den 4 Thlr. hinzunehmen, giebt $4\frac{2}{3}$ Thlr.;
2) im Falle sie aber auf die niedrigste Einheit (gGr.) gebracht werden sollen, die höheren Einheiten 4 Thlr. auf gGr. machen, und die 16 gGr. mit hinzunehmen, giebt 112 gGr.

§. 91.

Enthalten die mehrfach benannten Zahlen 3 oder mehr verschiedene Benennungen z. B. 4 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf. und soll man sie in einfach benannte Zahlen verwandeln, entweder bloß in Thlr. oder bloß in gGr. oder bloß in Pf., so muß man die höhern so wohl als die niedrigern Einheiten auf die verlangten Einheiten bringen und sie zu denen, die schon gegeben sind, hinzufügen. Z. B.

1) sollen die 4 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf. bloß in Pf. ausgedrückt werden, so macht man die 4 Thlr. zuerst auf Sgr., giebt 120 Sgr. nimmt die 10 Sgr. hinzu, giebt 130 Sgr., und diese 130 Sgr. macht man auf Pf., giebt 1560 Pf. und nimmt die 8 Pf. noch hinzu, so daß man 1568 Pf. erhält, die so viel ausmachen als 4 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf.

2) Soll aber dieselbe Summe bloß in Sgr. ausgedrückt werden, so verwandelt man die 4 Thlr. auf Sgr., giebt 120 Sgr., eben so die 8 Pf. auf Sgr., giebt $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Sgr. und nimmt beide Resultate zu den 10 Sgr., die schon gegeben sind, hinzu, wodurch man $130\frac{2}{3}$ Sgr. bekommt, die eben soviel ausmachen, als die gegebenen 4 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf.

3) Soll endlich diese Summe bloß in Thaler ausgedrückt werden, so macht man zuerst die 8 Pf. zu Sgr., giebt $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Sgr., diese zu den 10 Sgr. hinzugenommen giebt $10\frac{2}{3}$ oder $\frac{32}{3}$ Sgr., die man jetzt noch auf Thaler bringen muß, indem man durch 30 dividirt. Da aber ein Bruch $\frac{32}{3}$ durch eine ganze Zahl 30 (nach §. 67) dividirt werden muß, und man sonach $\frac{32}{3\,.\,30}$ od. $\frac{32}{90}$ Thlr. erhält, wofür man $\frac{16}{45}$ Thlr. setzen kann, so ist das gesuchte Resultat $4\frac{16}{45}$ Thlr. statt 4 Thlr. 10 Sgr. 8 Pf.

Dieselbe Summe ist also jetzt auf 3 verschiedene Arten als einfach benannte Zahl ausgedrückt, einmal durch 1568 Pf., dann durch $130\frac{2}{3}$ Sgr., zuletzt als $4\frac{16}{45}$ Thlr.

Man hätte auch in Nr. 3 die 10 Sgr. zuerst zu Pf. machen können und dann die ganze Summe der Pf., nämlich 128, auf Thaler machen, indem man mit 360 dividirt, giebt $\frac{128}{360}$ oder, mit 8 aufgehoben, $\frac{16}{45}$ Thlr.

Eben so würde man für 2 fl. 5 kr. 2 pf. die einfach benannten Zahlen 502 pf. oder $125\frac{1}{2}$ kr., oder $2\frac{11}{120}$ fl. erhalten.

Zu 91. Nun kann man solche Aufgaben wirklich ausrechnen lassen, und bei wenigern die Ausrechnung übergehen. Dagegen muß man bei jeder Aufgabe, sowie in den beiden obigen Beispielen, die mehrfach benannte Zahl auf jede der darin vorkommenden Einheiten reduciren lassen, um dadurch eine Uebersicht des Ganzen zu erleichtern. —

Zeigt man die Divisionen bloß an, so sieht der obige Ausdruck in Gulden so aus:

$$2\frac{5\frac{1}{2}}{60}\text{ fl.}$$

und so entstehen eben die Bruchsbrüche, von denen wir oben (§. 81) gesprochen haben.

§. 92.

Sollen mehrere mehrfach gleich benannte Zahlen addirt werden, z. B. 27 Thlr. 19 gGr. 5 Pf. und 18 Thlr. 4 gGr. 9 Pf. und 107 Thlr. 23 gGr. 7 Pf., so schreibe man sie unter einander und fange bei den niedrigsten Einheiten an zu addiren, reducire die jedesmalige herausgekommene Zahl der niedern Einheiten immer sogleich auf nächsthöhere, jedoch ohne Brüche zu nehmen, und nehme solche bei der folgenden Addition dieser höhern Einheiten mit hinzu. Z. B.

27 Thlr.	19 gGr.	5 Pf.
18 —	4 —	9 —
107 —	23 —	7 —
153 Thlr.	22 gGr.	9 Pf.

oder

9 fl.	17 kr.	2 pf.	
1127 =	23 =	— =	
756 =	— =	2 =	
17 =	41 =	1 =	
1910 fl.	22 kr.	1 pf.	die gesuchte Summe.

§. 93.

Hat man dagegen zwei dergleichen benannte Zahlen von einander zu subtrahiren, so setze man selbige wie vorher unter einander und fange bei den niedrigsten Einheiten an zu subtrahiren. Ist nun die untenstehende zu subtrahirende Zahl größer als die obere, so muß man oben von den nächst größern Einheiten eine 1 hinweg und, auf diese niedrigern Einheiten gebracht, zu diesen hinzunehmen; z. B.

	5 Thlr.	23 gGr.	9 Pf.
subtr.	2 —	9 —	5 —
Rest	3 Thlr.	14 gGr.	4 Pf.

oder

	7 fl.	9 kr.	2 pf.
subtr.	3 —	23 —	1 —
Rest	3 fl.	46 kr.	1 pf.

	9 ℔ 17 Loth — Quent.
subtr.	3 — 29 — 3 —
Rest	5 ℔ 19 Loth 1 Quent.

Es seyen noch von 27 fl. abzuziehen 4 fl. 16 kr. 2 pf., so erhält man

	27 fl. — kr. — pf.
subtr.	4 — 16 — 2 —
Rest	22 fl. 43 kr. 2 pf.

Zu 93. Die letztern Fälle und namentlich den letzten kann der Lehrer dadurch anschaulich machen, daß er statt 27 fl. lieber 26 fl. 59 kr. 4 pf. schreibt, was eben so viel ist, und dann die zu subtrahirende Summe darunter. Uebrigens muß man sehr viele Beispiele wirklich ausrechnen lassen.

§. 94.

Ist eine mehrfach benannte Zahl z. B. 7 ℔ 17 Loth 3 Quentchen z. B. 5 mal zu nehmen, so multiplicirt man jeden einzelnen Theil, fängt aber bei den niedrigsten Einheiten an, und reducirt immer die herausgekommenen Resultate auf die nächst höhern Einheiten, zu denen sie mit hinzugenommen werden müssen, z. B.

7 ℔ 17 Loth 3 Quentchen
5
37 ℔ 24 Loth 3 Quentchen.

§. 95.

Im Falle aber von einer mehrfach benannten Zahl, z. B. 347 Ctr. 87 ℔ 13 Loth der 34te Theil genommen werden sollte, müßte man damit anfangen, die höchsten Einheiten zu dividiren, dann den Rest, der bleibt, auf die nächst niedrigern Einheiten zu bringen, zu den schon vorhandenen hinzuzunehmen, und dies dann ebenfalls noch zu dividiren, u. s. fort, bis man die letzten Einheiten dividirt hat. Obige Aufgabe wird dann in ihrer Auflösung so aussehen (den Ctr. zu 110 ℔ gerechnet):

Ctr. ℔ Loth
34 | 347 87 13
34
Rest 7 | 10 Ctr.
mult. 110
770
addirt 87
34 | 857 | 25 ℔
68
177
170
Rest 7
mult. 32
224
addirt 13
34 | 237 | $6\frac{33}{34}$ Loth oder nahehin 10 Ctr. 25 ℔
204 7 Loth.
33

daher das Resultat 10 Ctr. 25 ℔ $6\frac{33}{34}$ Loth.

Zu 94. und 95. Dieses letztere kann der Lehrer anschaulich machen, indem er vorher zeigt, daß 347 Ctr. 87 Pf. 13 Loth eben so viel sind als 340 Ctr. 850 Pf. 237 Loth, daß es also einerlei seyn muß, ob man von diesem letzteren oder von dem ersteren den 34ten Theil nimmt. Nimmt man aber von diesem letzteren den 34ten Theil, so muß man 340 Ctr. durch 34 dividiren, und dies giebt gerade 10 Ctr., dann müssen auch die 850 Pf. durch 34 dividirt werden, und hier erhält man gerade 25 Pf.; endlich muß man auch die 237 Loth durch 34 dividiren, und diese geben $6\frac{33}{34}$ Loth.

In beiden Fällen der Multiplikation und der Division kann man auch die gegebene mehrfach benannte Zahl auf eine einfach benannte reduciren, und diese dann multipliciren oder dividiren. Die Aufgabe §. 94 würde dann werden, indem man statt 7 Pf. 17 Loth 3 Quentchen entweder $7\frac{71}{128}$ Pf. oder $241\frac{3}{4}$ Loth oder 967 Quentchen schreibt,

$7\frac{71}{128}$
mal 5
$37\frac{99}{128}$ Pf. oder 37 Pf. 24 Loth 3 Quentchen,

oder $241\frac{3}{4}$ Loth
mal 5
$1208\frac{3}{4}$ Loth, oder (wenn man die 1208 Lothe zu Pfd. und die $\frac{3}{4}$ Loth zu Quentchen macht) 37 Pf. 24 Loth 3 Quentchen; endlich
967 Quentchen
mal 5
4835 Quentchen oder 1208 Loth 3 Quentchen oder 37 Pfd. 24 Loth 3 Quentchen.

Die andere Aufgabe §. 95 wird aber geben, wenn man statt 347 Ctr. 87 Pf. 13 Loth entweder $347\frac{27197}{35200}$ Ctr. oder $38257\frac{13}{32}$ Pfd. oder 1224237 Loth schreibt, und dann durch 34 dividirt: erstlich $10\frac{7\frac{27197}{35200}}{34}$ Ctr., welcher Bruchsbruch auf einen gewöhnlichen gebracht werden kann und $10\frac{27437}{119680}$ Ctr. giebt, woraus man, wenn der Centner-Bruch auf Pfunde und Lothe gemacht wird, wieder 10 Ctr. 25 Pf. $6\frac{33}{34}$ Loth erhält. Zweitens ergiebt sich, wenn man $38257\frac{13}{32}$ Pfd. durch 34 dividirt, $1125\frac{7\frac{13}{32}}{34}$ Pf. Macht man hier die ganzen Pfd. auf Ctr., und verwandelt man den Bruchsbruch in einen gewöhnlichen Bruch (nach §. 81), so erhält man 10 Ctr. $25\frac{237}{1088}$ Pfd. und dieser Bruch von einem Pfd. giebt, auf Lothe gebracht, wieder $6\frac{33}{34}$ Loth; also das ganze Resultat: 10 Ctr. 25 Pf. $6\frac{33}{34}$ Loth. — Dividirt man drittens die 1224237 Loth durch 34, so erhält man $36006\frac{33}{34}$ Loth, und macht man die 36006 Lothe zu Pfunden, so giebt dies 1125 Pf. $6\frac{33}{34}$ Loth und die 1125 Pf. zu Ctr. gemacht, giebt 10 Ctr. 25 Pf. $6\frac{33}{34}$ Loth.

Man kann, in so ferne es angeht, mehrere solche Aufgaben auf gedachte 4 oder mehr Arten lösen, und die Rechnungen immer gehörig ausführen lassen, damit die Schüler hier die nöthige Einsicht und Uebersicht erhalten, und besonders erkennen lernen, daß die Form der Rechnung das völlig unwesentliche ist, und trotz der vielen Formen, welche die Rechnung haben kann, doch immer eines und dasselbe gethan ist, nämlich eine gegebene benannte Zahl vervielfältigt oder getheilt.

Da diese beiden Aufgaben die ganze Regula de tri enthalten, wie weiter unten gezeigt wird, so kann man sich nicht genugsam bei ihnen verweilen, und die Schüler in den verschiedenen Arten, wie sie gelöst werden, nie zu viel einüben.

§. 96.

Erinnert man sich der §§. 66 und 75, so wird man wissen, daß §. 66 lehrt, wie man verfahre, wenn man eine Zahl mit einem Bruch multiplicirt; man multiplicirt nämlich mit dem Zähler bloß, und dividirt dann das, was herauskommt, durch den Nenner des Bruches. Eben so lehrt §. 75, wie man eine Zahl durch einen Bruch dividirt, nämlich man multiplicirt die gegebene Zahl zuerst mit dem Nenner des Bruches und dividirt dann das, was herauskommt, durch den Zähler. Z. B. 12 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt d. h. $\frac{3}{4}$ mal genommen d. h. den 4ten Theil davon 3 mal genommen, giebt $\frac{12.3}{4}$ oder $\frac{36}{4}$ oder 9; wird dagegen 12 durch $\frac{3}{4}$ dividirt (d. h. die Zahl gefunden, die $\frac{3}{4}$ mal genommen 12 giebt), so erhält man $\frac{12.4}{3}$ oder $\frac{48}{3}$ oder 16.

Ferner kann man jede gemischte Zahl in einen Bruch verwandeln (nach §. 64), folglich kann man auf dieselbe Weise auch eine gegebene benannte Zahl nicht bloß 5 mal, nicht bloß $\frac{3}{4}$ mal, sondern auch $9\frac{3}{4}$ mal nehmen, so wie umgekehrt eine neue benannte Zahl finden, welche, wenn man sie $9\frac{3}{4}$ mal nimmt, die erstere wieder giebt; dies heißt aber eine gegebene benannte Zahl mit einer gemischten Zahl z. B. mit $9\frac{3}{4}$ multipliciren und dividiren.

Wendet man dieses hier an, so finden die Aufgaben §. 94 und 95 nämlich: eine gegebene mehrfach benannte Zahl mit einer andern gegebenen Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, auch dann noch statt, wenn diese gegebene Zahl nicht bloß eine ganze Zahl, sondern auch eine gebrochene oder gemischte Zahl ist.

Man verwandelt nämlich die gemischte Zahl zuerst in eine gebrochene (Bruch) z. B. $9\frac{3}{4}$ in $\frac{39}{4}$, und im Falle man die gegebene benannte Zahl damit multipliciren soll, multipli-

cirt man mit 39 und dividirt dann durch 4; in so ferne aber die gegebene Zahl durch $9\frac{3}{4}$ oder $\frac{39}{4}$ dividirt werden soll, multiplicirt man sie zuerst mit 4 und dividirt dann, was herauskommt, durch 39.

Z. B. Man soll 6 Thlr. 14 gGr. 3 Pf. $9\frac{3}{4}$ mal nehmen, oder mit $9\frac{3}{4}$ multipliciren; man erhält:

```
              6 Thlr. 14 gGr. 3 Pf.
  mult.                    39
        4 | 257 Thlr.  3 gGr. 9 Pf.
             4
           ---
             1
  mult.     24  | 64 Thlr.
        4 | 27  |  6 gGr.
            24
           ---
             3
            12
           ---
        4 | 45  | 11¼ Pf.
```

es kommt also 64 Thlr. 6 gGr. $11\frac{1}{4}$ Pf.

Sollte aber 64 Thlr. 6 gGr. $11\frac{1}{4}$ Pf. durch $9\frac{3}{4}$ dividirt werden, so müßte man erst $\frac{39}{4}$ statt $9\frac{3}{4}$ nehmen und dann erhielte man

```
              64 Thlr. 6 gGr. 11¼ Pf.
  mult.                         4
        39 | 257 Thlr. 3 gGr.  9 Pf.
             234
             ---
              23 | 6 Thlr.
  mult.       24
             ---
              92
              46
               3
             ---
        39 | 555 | 14 gGr.
              39
             ---
             165
             156
             ---
               9
  mult.       12
             ---
        39 | 117 | 3 Pf.
             117
             ---
```

so daß also wieder 6 Thlr. 14 gGr. 3 Pf. sich ergiebt.

Zu 96. Der Wichtigkeit der beiden Aufgaben §. 94 und 95 wegen, wollen wir hier auch noch einige Abkürzungen bemerken lassen, die besonders bei dem Multipliciren statt finden können, in so ferne man nämlich die bekannten Vortheile anwendet, die das Zerfällen der Zahlen im Kap. III. mit sich bringt.

1) Statt z. B. mit 35 zu multipliciren, multiplicirt man zuerst mit 5, dann was herauskommt mit 7 (weil 35 = 5 . 7 ist), oder auch umgekehrt, z. B.

	Thlr.	gGr.	Pf.
	7 Thlr.	19 gGr.	6 Pf.
mult.			35
	273 Thlr.	10 gGr.	8 Pf.

oder

	Thlr.	gGr.	Pf.
	7 Thlr.	19 gGr.	6 Pf.
mult.			5
	39 —	1 —	6 —
mult.			7
	273 Thlr.	10 gGr.	6 Pf.

oder

	Thlr.	gGr.	Pf.
	7 Thlr.	19 gGr.	6 Pf.
mult.			7
	54 —	16 —	6 —
mult.			5
	273 Thlr.	10 gGr.	6 Pf.

Ferner erhält man, wenn 6 fl. 13 kr. 2 pf. 48 mal genommen werden sollen,

fl.	kr.	pf.
6 fl.	13 kr.	2 pf.
		48
298 fl.	48 kr.	— pf.

oder auch, weil 48 = 6 . 8 = 6 . 2 . 4 ist,

fl.	kr.	pf.
6 fl.	13 kr.	2 pf.
		6
37 =	21 =	— =
		2
74 =	42 =	— =
		4
298 fl.	48 kr.	— pf.

oder auch

6 fl.	13 kr.	2 pf.
		4
24 =	54 =	— =
		6
149 =	24 =	— =
		2
298 fl.	48 kr.	— pf.

oder noch

6 fl.	13 kr.	2 pf.
		2
12 =	27 =	0 =
		4
49 =	48 =	0 =
		6
298 fl.	48 kr.	— pf.;

so daß immer dasselbe Endresultat nämlich 298 fl. 48 kr. sich ergiebt.

2) Statt z. B. mit 43 zu multipliciren, zerlege man 43 in 8.5 + 3, nehme die benannte Zahl nach vorhergehender Nr. 1 zuerst 8.5 d. h. 40 mal, hernach noch 3 mal, und addire die Resultate; z. B. es sollen 7 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf. etwa 43 mal genommen werden, so ist die direkte Rechnung so:

	7 Thlr.	21 Sgr.	3 Pf.
mult.			43
	331 Thlr.	13 Sgr.	9 Pf.

Auf dem Wege der Zerlegung sieht aber die Rechnung so aus:

	7 Thlr.	21 Sgr.	3 Pf.	
mult.			8	
	61 =	20 =	0 =	
mult.			5	
	308 =	10 =	0	
addirt	23	3	9	(3 mal)
	331 Thlr.	13 Sgr.	9 Pf.	

3) Statt z. B. mit 38 zu multipliciren, zerlege man diese Zahl in 8.5 — 2, multiplicire daher erstlich mit 8.5, und ziehe von diesem Resultat die benannte Zahl 2 mal genommen ab, z. B.

	39 Pf.	7 Loth	3 Quentchen
mult.			38
	1491 Pf.	6 Loth	2 Qu.

oder

	39 Pf.	7 Loth	3 Qu.	
mult.			8	
	313 =	30 =	— =	
mult.			5	
	1569 =	22 =	— =	
subtr.	78 =	15 =	2 =	(2 mal)
	1491 Pf.	6 Loth	2 Qu.	

4) Statt z. B. 19 Thlr. 12 Sgr. mit 15 zu multipliciren, zerlege man 15 in 8 + 4 + 2 + 1, wo jeder Summand immer die Hälfte des nächstvorhergehenden ist. Dann nehme man zuerst die gegebene benannte Zahl 1 mal, hernach davon das Doppelte, dann davon abermals das Doppelte (so hat man die benannte Zahl noch 4 mal genommen) und davon noch einmal das Doppelte (so daß die benannte Zahl noch 8 mal genommen sich sieht) und addire dann alles zusammen, wie die nachstehende Rechnung zeigt:

19 Thlr.	12 Sgr.	(1 mal)
38 =	24 =	(2 mal)
77 =	18 =	(4 mal)
155 =	6 =	(8 mal)
291 Thlr.	— Sgr.	

Nimmt man aber direkt die 19 Thlr. 12 Sgr. 15 mal, so erhält man zuerst 15 mal 12 Sgr. oder 6 Thlr. und dann noch 15 mal 19 Thlr. oder 285 Thlr.; also zusammen wiederum 291 Thlr.

Es versteht sich, daß man in jedem besonderen Falle besondere Betrachtungen anstellen muß, um den Gang der Rechnung zu bestimmen.

5) Auch läßt sich ein analoges Verfahren anwenden, wenn eine benannte Zahl mit einem Bruch multiplicirt werden soll; bei welcher Gelegenheit es jedoch selten Vortheile gewährt; obgleich man z. B. $\frac{5}{9}$ oder $\frac{10}{18}$ in $\frac{1}{18}+\frac{3}{18}+\frac{6}{18}$ d. h. in $\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ zerlegen kann.

Der Lehrer mache nun den Schüler darauf aufmerksam, daß dieses in den (Nrn. 1 — 5) angegebene Zerlegen nicht bloß für die Zahlen 40, 43, 38, 15 und $\frac{5}{9}$ anwendbar ist, sondern bei jeder andern Zahl ebenfalls angewandt werden kann. Z. B. 119 läßt sich zerlegen in 5.6.4 — 1; statt mit 119 zu multipliciren, multiplicirt man daher zuerst mit einem von den drei Faktoren 5, 6 und 4, dann was herauskommt mit dem andern, was herauskommt wieder mit dem dritten, und von diesem Resultat zieht man dann die gegebene Zahl (1 mal genommen) ab, wie in Nr. 3 gezeigt. Eben so könnte man 119 zerlegen in 7.4.4 + 7; man könnte also erst mit 7.4.4 nach Nr. 1 multipliciren, dann die gegebene Zahl noch 7 mal genommen dazu addiren. Auch läßt sich 119 zerlegen in 7.17, so daß man nach Nr. 1 die Zahl erst 7 mal, und, was herauskommt, noch 17 mal nehmen könnte. Da aber 17 wieder in 4.4 + 1 zerlegt werden kann, so kann man diese letztere Multiplikation selber wieder nach Nr. 2 verrichten. Ferner kann man 119 auch zerlegen in 60 + 30 + 20 + 5 + 4, wo 30 die Hälfte von 60, 20 der dritte Theil von 60, 5 der vierte Theil von 20, und 4 der fünfte Theil von 20 ist.

Es seyen 3 fl. 47 kr. 3 pf. 119 mal zu nehmen, so giebt dies direkt folgende Rechnung:

	3 fl.	47 kr.	3 pf.
mult.		119	
	451 fl.	42 kr.	1 pf.

oder, weil 119 = 4.5.6 — 1 ist, folgende Rechnung:

	3 fl.	47 kr.	3 pf.	
			4	
	15 „	11 „	— „	
			5	
	75 „	55 „	— „	
			6	
	455 „	30 „	— „	
subtr.	3 „	47 „	3 „	
	451 fl.	42 kr.	1 pf.	

oder, weil 119=4.4.7+7 ist,

	3 fl.	47 kr.	3 pf.	
			4	
	15 „	11 „	— „	
			4	
	60 „	44 „	— „	
			7	
	425 „	8 „	— „	
addirt	26 „	34 „	1 „	(7 mal)
	451 fl.	42 kr.	1 pf.	

oder auch, weil 119=7.17 und 17=4.4+1 ist,

	3 fl.	47 kr.	3 pf.	
			7	
a)	26 „	34 „	1 „	
			4	
	106 „	17 „	— „	
			4	
	425 „	8 „	— „	
addirt	26 „	34 „	1 „	(a 1 mal)
	451 fl.	42 kr.	1 pf.	

oder, weil 17=4.4+1 und 119=17.7 ist,

	3 fl.	47 kr.	3 pf.	
			4	
	15 „	11 „	— „	
			4	
	60 „	44 „	— „	
addirt	3 „	47 „	3 „	(1 mal)
	64 „	31 „	3 „	
mult.			7	
	451 fl.	42 kr.	1 pf.	

oder, weil 119 = 60 + 30 + 20 + 5 + 4 ist,

	3 fl.	47 kr.	3 pf.	
			60	
a)	227 fl.	45 kr.	— pf.	
a divid. 2)	113 "	52 "	2 "	(a $\frac{1}{2}$ mal)
a divid. 3)	75 "	55 "	— "	(a $\frac{1}{3}$ mal = b)
b divid. 4)	18 "	58 "	3 "	(b $\frac{1}{4}$ mal)
b divid. 5)	15 "	11		(b $\frac{1}{5}$ mal)
	451 fl.	42 kr.	1 pf.	

Von allen diesen möglichen Wegen muß man immer denjenigen wählen, der in dem jedesmalig gegebenen Falle der leichteste ist, welches man freilich erst erkennen kann, wenn man schon viel Uebung gehabt hat.

§. 97.

Alle im Leben für unsere Rechenkunst vorkommenden Aufgaben, die nicht eine bloße Addition oder Subtraktion benannter Zahlen erfordern (und diese Gattung ist zu einfach, als daß sie eine nähere Beachtung nöthig hätte), lassen sich durch das in den §§. 94, 95 und 96 enthaltene Multipliciren und Dividiren auflösen. — Sie lassen sich nämlich alle auf folgende zwei Fälle zurück bringen.

1) Zu dem mehrfachen gehört irgend eine gegebene benannte Zahl, was gehört zu dem einfachen? Z. B. 8 ℔ kosten 16 fl. was kostet 1 ℔? oder für 8 Thlr. bekommt man 16 Loth, wieviel für 1 Thlr.? oder 8 Soldaten verzehren 40 ℔ Brod, was verzehrt 1 Soldat? u. s. w.

   Es ist offenbar, daß man das gesuchte immer erhält, wenn man die gegebene benannte Zahl (16 fl., 16 Loth, 40 ℔ u. s. w.) durch die Zahl des mehrfachen (8) dividirt.

2) Zu dem einfachen gehört eine gegebene benannte Zahl, was gehört zu dem mehrfachen? z. B. für 1 Thlr. bekommt man 3 ℔ 17 Loth, wieviel bekommt man für 8 Thlr.? oder 1 Stab ist 5 Fuß 2 Zoll lang, welche Länge geben 8 solche

Stäbe? oder 1 Elle kostet 4 gGr. was kosten 8 Ellen? u. s. w.

In diesem Falle erhält man immer das gesuchte Resultat, wenn man die gegebene benannte Zahl (3 ℔ 17 Loth, 5 Fuß 2 Zoll, 4 gGr. u. s. w.) mit der Zahl des mehrfachen (8) multiplicirt.

Zu 97. Man kann dies den Schülern auf folgende Art noch anschaulicher machen. Man nimmt nämlich eine bestimmte Aufgabe und sagt: Jede einfache Elle kostet 4 gGr.; daher das 8 fache der Elle 8 mal so viel, d. h. 8 mal 4 gGr.; oder, für jeden einfachen Thlr. bekommt man 3 Pfd. 17 Loth, also für das 8 fache eines Thlr. 8 mal so viel, d. h. 8 mal 3 Pfd. 17 Loth.

Eben so für den ersten Fall: das 8 fache eines Pfd. kostet 16 fl., folglich das einfache Pfd., den 8ten Theil davon, d. h. das, was herauskommt, wenn man die gegebenen 16 fl. durch 8 dividirt. —

Desgleichen kann man auch dasselbe anschaulich machen, wenn das mehrfache einen Bruch enthalten sollte. Z. B. Das mehrfache Pfd. kostet 4 Thlr. 16 Sgr., folglich das $9\frac{3}{4}$ fache des Pfundes $9\frac{3}{4}$ mal so viel; d. h. $9\frac{3}{4}$ mal 4 Thlr. 16 Sgr. Oder für den ersten Fall: das $9\frac{3}{4}$ fache eines Pfundes kostet 24 Thlr., folglich muß man die 24 Thlr. durch $9\frac{3}{4}$ dividiren, um den Preis eines Pfds. zu erhalten.

Hier ist zugleich die beste Gelegenheit zu zeigen, daß man bei jeder solchen Aufgabe immer nachsehen müsse, ob wirklich zu jedem einfachen dasselbe gehört und ob das mehrfache auch immer ein mehrfaches des zugehörigen nothwendig macht, denn ist dies nicht der Fall, so findet auch die Auflösung nicht statt. Z. B. 1 Soldat marschirt täglich 4 Meilen, wie weit kommen 100 Soldaten? Wenn gefragt würde, wieviel Meilen machen 100 Soldaten, so müßte man allerdings antworten: 100 mal 4 Meilen, sie machen nämlich den Weg 100 mal. Wenn man z. B. sagte: jede Meile kostet dem Staate 2 Pf. an seinen Schuhen, wieviel kostet es dem Staate, wenn von 100 Soldaten jeder 4 Meilen marschirt;

so kommt es hier allerdings darauf an, zu wissen, wieviel Meilen sie alle gemacht haben; man sagt also: 1 Soldat macht 4 Meilen, folglich 100 Soldaten machen 100 mal 4 oder 400 Meilen; dann 1 Meile kostet 2 Pf. an Schuhen, also kosten die 400 Meilen, 400 mal 2 Pf. oder 800 Pf. — Da sie aber alle denselben Weg machen, so kommen die 100 Soldaten nicht weiter als ein einziger; wird also gefragt: wie weit kommen 100 Soldaten? so ist die Antwort: 4 Meilen weit, so wie ein einzelner.

Ferner: in 1 Sekunde fällt ein Stein 15 Fuß tief, wie tief fällt er in 3 Sekunden? — Auch hier muß man also zuerst untersuchen, ob er in jeder einzelnen Sekunde 15 Fuß tief fällt; ist dies der Fall, so muß er natürlich in 3 Sekunden 3 mal 15 Fuß tief fallen. Allein man bemerkt leicht, daß ein Stein der schon 1 Sekunde lang gefallen ist, dann viel schneller fällt, also in der nächsten Sekunde viel mehr als 15 Fuß tief fallen wird, in der nächsten Sekunde noch viel tiefer, und so sieht man dann sogleich ein, daß man diese Aufgabe auf diesem einfachen Weg nicht behandeln kann; oder, mit andern Worten, daß dies eine Aufgabe sey, die nicht hieher gehöre. Dergleichen Aufgaben, die nicht hieher gehören, ohnerachtet sie dieselbe Form zu haben scheinen, giebt es sehr viele, so daß man also ja nie unterlassen darf, jedesmal erst die vorhin angemerkte Untersuchung vorzunehmen, ehe man die Auflösung des Paragraphen statt finden läßt.

§. 98.

Da diese beiden Arten Aufgaben (§. 97) so wichtig sind, so müssen wir noch einige Bemerkungen über sie machen.

Es seyen nämlich folgende Aufgaben gegeben:

1) 8 ℔ kosten 64 Thlr. 9 Sgr., was kostet 1 Loth? — Hier erhält man das gesuchte Resultat nicht, wenn man durch 8 dividirt, denn 8 ℔ sind ja nicht das 8 fache von 1 Loth; man muß also die 8 ℔ erst zu Loth machen, giebt 8.32 oder 256 Loth, und dann 64 Thlr. 9 Sgr. durch 256 dividiren,

um das gesuchte Resultat zu erhalten, denn 8 ℔ oder 256 Loth sind das 256 fache von 1 Loth.

2) 9 ℔ 24 Loth kosten 37 Thlr., was kostet 1 ℔? — Hier kann man wieder nicht wissen, das wievielfache 9 ℔ und 24 Loth von 1 ℔ sind, wenn man nicht vorher die 9 ℔ 24 Loth in eine einfach benannte Zahl von ℔ verwandelt (nach §. 90); man erhält $9\frac{3}{4}$ ℔, und daher das gesuchte Resultat, wenn man die 37 Thlr. durch $9\frac{3}{4}$ oder $\frac{39}{4}$ dividirt; denn 9 ℔ 24 Loth oder $9\frac{3}{4}$ ℔ sind ja das $9\frac{3}{4}$ fache von 1 ℔.

3) 9 ℔ 24 Loth kosten 37 Thlr., was kostet 1 Loth? — Hier muß man die 9 ℔ 24 Loth erst zu Lothen machen, giebt $9 . 32 + 24$ oder 312 Loth, und nun die 37 Thlr. durch 312 dividiren; denn 9 ℔ 24 Loth, d. h. 312 Loth sind das 312 fache von 1 Loth.

Es versteht sich von selbst, daß dieselben Reduktionen hätten statt finden müssen, wenn statt der Aufgaben 1, 2, 3 folgende gegeben worden wären:

1) 1 Loth kostet 7 gGr., was kosten 8 ℔?

2) 1 ℔ kostet 2 fl. 3 kr, was kosten 9 ℔ 24 Loth?

3) 1 Loth kostet 27 Sgr., was kosten 9 ℔ 24 Loth?

§. 99.

Man sieht nun leicht ein, wie in jedem gegebenen Falle, sobald er nicht zu den in der Note zu §. 97 angeführten gehört, alle diese Aufgaben nach §. 97 ohne weiters gelöst werden können. — Nur eine einzige Gattung von Aufgaben kommt noch vor, die zwar hieher gehören, aber doch von den Regeln §. 97 eine Ausnahme zu machen scheinen. Es sey gegeben:

1) 1 Arbeiter bringt eine bestimmte Arbeit in 12 Tagen zu Ende, wieviel werden 3 Arbeiter dazu brauchen? Da man sogleich sieht, daß dies nicht 3 mal soviel Tage seyn können, so scheint die Aufgabe zu denjenigen zu gehören, die in obiger Note angeführt sind, und die sich nicht hier auflösen lassen.

Allein bei dieser Aufgabe ist dieses nur Schein, und rührt daher, daß sie die Form einer einzigen Aufgabe hat, in der That aber aus zweien andern zusammengesetzt ist, wie man

sogleich aus folgender Betrachtung ersehen kann. Die zwei Aufgaben, aus denen sie besteht, sind folgende:

a) 1 Arbeiter bringt eine Arbeit in 12 Tagen fertig, wie viel werden 3 Arbeiter in derselben Zeit fertig bringen? Antwort: Die 3 fache Arbeit. Dann

b) Zur 3 fachen Arbeit brauchen diese 3 Arbeiter 12 Tage, wieviel Tage werden sie zu der 1 fachen Arbeit brauchen? Antwort: Den dritten Theil von 12 Tagen, d. h. $\frac{12}{3}$ oder 4 Tage.

Wäre gegeben:

2) In einer Festung hat man auf 3 Jahre Brod, wenn jeder einzelne täglich 16 Loth bekommt, wieviel kann jeder täglich bekommen, wenn es nur auf 1 Jahr reichen soll? Man sieht sogleich, daß dies nicht der dritte Theil seyn kann; man sieht aber auch sogleich, daß die Aufgabe aus folgenden zweien zusammengesetzt ist:

a) Wenn bei 16 Loth Ration auf 3 Jahre Proviant vorhanden ist, wieviel muß vorhanden seyn, wenn selbiger bei der nämlichen Ration nur auf 1 Jahr reichen soll? Antwort: Der dritte Theil, d. h. der vorhandene Proviant, durch 3 dividirt. Dann:

b) Von dem dritten Theil des Proviants kann man 1 Jahr lang jedem täglich 16 Loth geben, wieviel kann jedem von dem ganzen vorhandenen Proviant gegeben werden? Antwort: 3 mal so viel, also 3 mal 16 Loth oder 48 Loth, denn der ganze Proviant ist das 3 fache des dritten Theils desselben.

Betrachtet man die Aufgaben 1) und 2) näher, so sieht man, daß zu den 3 fachen Arbeitern der 3te Theil der Zeit gehört, und zu dem 3ten Theil der Zeit, das 3 fache der täglichen Ration Brod. Ein ähnliches Resultat erhält man bei allen solchen Aufgaben.

1) Sie scheinen alle nicht hieher zur Auflösung zu gehören, weil nicht zu dem 2 fachen auch das 2 fache der zugehörigen benannten Zahl gehört.

2) Sie bestehen alle aus 2 hieher gehörigen Aufgaben, die man leicht entwickeln kann.

3) Man kann aber immer die wirkliche Entwickelung dieser zwei Aufgaben ersparen, wenn man bei jeder gegebenen Aufgabe erst sich fragt, ob zu dem 2 fachen des einen, entweder das zweifache der zugehörigen benannten Zahl gehöre, oder ob nur gerade die Hälfte. Im erstern Fall wird die Aufgabe nach §. 97 ohne weiters gelöst, im zweiten Falle aber gerade auf dem umgekehrten Wege, nämlich was zu dem 3 fachen gehören soll, erhält man, indem man die zum 1 fachen gehörige benannte Zahl nicht mit 3 multiplicirt, sondern durch 3 dividirt, und was zum 1 fachen gehören soll, erhält man, wenn man das zum 3 fachen gehörige nicht durch 3 dividirt, sondern mit 3 multiplicirt. — Eben weil diese Aufgaben, wenn man sie als einfache betrachtet, (die sie aber nicht sind) gerade auf dem umgekehrten Wege als die übrigen wirklich einfachen gelöst werden, nennt man sie umgekehrte oder verkehrte Aufgaben.

Zu 99. Der Lehrer mache hier die Schüler darauf aufmerksam, daß bei gegebenen Aufgaben 3 Fälle vorkommen können; z. B. 1) für 1 Thlr. bekommt man 4 Pf., wieviel bekommt man für 7 Thlr.? 2) Aus einem vollen Faß laufen in 1 Minute 5 Bouteillen aus, wieviel werden in 6 Minuten ausgelaufen seyn? 3) Zu Unterfutter für die Uniform einer Compagnie Soldaten braucht man 200 Ellen Leinewand, wenn sie 1 Elle breit ist, wieviel wird man brauchen, wenn sie $1\frac{1}{4}$ Elle breit ist?

Bei der ersten fragt sich der Schüler: bekommt man für das 2 fache Geld, nämlich für 2 Thlr., auch die 2 fache Waare? „Ja;" folglich ist dies eine Aufgabe, wie sie alle seyn sollen, eine direkte Aufgabe, und sie wird ohne weiters nach §. 97 gelöst, und giebt 4 mal 7 Pf. oder 28 Pf. — Bei der zweiten fragt er sich wieder: Läuft in der 2 fachen Zeit, nämlich in 2 Stunden, auch das 2 fache der Flüßigkeit aus, nämlich 10 Bouteillen? „Nein, denn die Erfahrung lehrt, daß sowie das Faß leerer wird, dann in jeder folgenden Minute immer weniger ausläuft." Nun fragt er sich weiter: Läuft vielleicht in der 2 fachen Zeit gerade nur die Hälfte aus? „Auch nicht;" nun so ist dies eine Aufgabe,

die nicht hieher gehört, die ich hier mit der gewöhnlichen Rechenkunst, d. h. mittelst der Regeln des §. 97, welche die ganze gewöhnliche Rechenkunst ausmachen, nicht auflösen kann. — Bei der dritten fragt er sich wieder: Wenn die Leinewand die 2fache Breite hat, braucht man auch die 2fache Ellenzahl zu dem bestimmten Zweck? „Nein.“ — Gebraucht man vielleicht bei der 2fachen Breite der Leinwand gerade nur die Hälfte der Ellenzahl? „Ja;“ — nun so ist dies eine umgekehrte Aufgabe, d. h. eine Aufgabe, die eigentlich aus zwei gewöhnlichen (direkten) Aufgaben zusammengesetzt ist, die man aber auflösen kann, ohne die beiden Aufgaben erst entwickeln zu müssen, indem man nur das umgekehrte der Regeln (§. 97) ausübt; wo jene Regeln Multiplikation verlangen, da dividirt man, wo sie Division verlangen, da multiplicirt man. Also: bei 1 Elle Breite gebraucht man 200 Ellen Leinwand, wieviel gebraucht man bei $1\frac{1}{4}$ Ellen Breite? gehört zu §. 97, Nr. 2. Die dortige Regel verlangt, man soll mit $1\frac{1}{4}$ multipliciren, folglich, da man in diesem Fall das umgekehrte thun soll, so dividirt man durch $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ (nach §. 96) und erhält $\frac{4 \cdot 200}{5}$ oder 160 Ellen.

Der Lehrer gebe nun viele Aufgaben von allen 3 Gattungen, sehe genau darauf, daß die Schüler bei jeder dieselben Fragen anstellen, also bei jeder selbst immer angeben, ob sie zu den direkten Aufgaben gehören, oder hier gar nicht gelöst werden können, oder endlich, ob sie umgekehrte Aufgaben sind. Auch lasse er hier wieder ohngefähr nur die Hälfte der Aufgaben wirklich ausrechnen, bei der andern Hälfte aber bloß beantworten, ob und wie sie gelöst werden können.

Zugleich bemerken wir noch, daß dergleichen Aufgaben der zweiten Gattung, die hier nicht gelöst werden können, gewöhnlich mittelst der sogenannten Algebra aufgelöst werden.

Kapitel VI.

Von der Regula de tri.

§. 100.

Die Aufgaben des vorigen Kapitels §. 97 heißen gewöhnlich Multiplikations- und Divisions-Exempel, weil sie entweder bloß durch Multiplikation oder bloß durch Division gelöst werden. In beiden Gattungen kommt ein 1 faches und ein mehrfaches vor; und es ist entweder 1) eine zu dem mehrfachen gehörige benannte Zahl gegeben, und die zu dem 1 fachen gehörige zu finden; dies giebt die Nr. 1 des §. 97 und man hat bloß zu dividiren; oder 2) es ist die zu dem 1 fachen gehörige benannte Zahl gegeben, und die zu dem mehrfachen gehörige zu finden; das ist der Fall bei Nr. 2 des §. 97 und man hat bloß zu multipliciren. Versteht sich, daß nur von direkten Aufgaben die Rede ist, weil die umgekehrten nicht hieher gehören würden, wenn sie nicht aus zweien zusammengesetzt wären.

§. 101.

Es können aber Aufgaben gegeben sein, in denen das 1 fache gar nicht vorkommt, z. B.

1) 7 ℔ kosten 28 Thlr, was kosten 9 ℔?
2) Für 3 Thlr. erhält man 8 Ellen, wieviel erhält man für 10 Thlr.?
3) 100 Thlr. geben 4 Thlr. Zinsen, wieviel geben 275 Thlr.?

In allen diesen Aufgaben kommt das 1 fache nicht vor, sondern 2 mehrfache, und die zu dem einen mehrfachen gehörige benannte Zahl; die zu dem andern mehrfachen gehörige benannte Zahl aber ist zu finden.

Man kann nun bei allen diesen Aufgaben zuerst aus dem einen mehrfachen das einfache suchen, und dann aus dem einfachen das andere mehrfache, so daß also jede derselben in zwei andere der vorhergehenden (§. 97) zerlegt wird. Statt der obigen Aufgabe 1) erhält man nämlich die beiden:

a) 7 ℔ kosten 28 Thlr. was kostet 1 ℔? — dann

b) 1 ℔ kostet, was man so eben erhalten, was kosten 9 ℔?

Statt der Aufgabe 2) hat man:

a) Für 3 Thlr. erhält man 8 Ellen, wieviel für 1 Thlr.?

b) Für 1 Thlr. erhält man so viel Ellen, als so eben gefunden wurde, wieviel erhält man für 10 Thlr.?

Endlich hat man für die Aufgabe 3):

a) 100 Thlr. Kapital geben 4 Thlr. Zinsen, wieviel giebt 1 Thlr. Kapital?

b) 1 Thlr. Kapital giebt Zinsen, so viel als man so eben erhalten, wieviel tragen 275 Thlr. Kapital?

Dabei bemerkt man, daß die erste Aufgabe (lit. a.) immer zu Nr. 1 des §. 97, die zweite aber (lit. b.) immer zu Nr. 2 desselben §. gehört, daß also die erste gelöst wird, indem man die zu dem ersten mehrfachen gehörige benannte Zahl durch die Zahl des mehrfachen dividirt, und daß dann die zweite gelöst wird, indem man das was herauskommt, mit der Zahl des zweiten mehrfachen multiplicirt. — Also die erste Aufgabe wird gelöst, indem man die 28 Thlr. zuerst durch 7 dividirt, (erhält man was 1 ℔ kostet) und, was herauskommt, wieder mit 9 multiplicirt (erhält man was 9 ℔ kosten.) — Eben so wird die zweite gelöst, indem man die 8 Ellen zuerst durch 3 dividirt, (giebt, wieviel man für 1 Thlr. erhält), dann, was herauskommt, wieder mit 10 multiplicirt (muß geben, wieviel man für 10 Thlr. erhält.) Desgleichen erhält man auch die Auflösung der dritten Aufgabe, wenn man erstlich die 4 Thlr Zinsen durch 100 dividirt, (giebt die Zinsen für 1 Thlr.), dann, was herauskommt, mit 275 multiplicirt (dies muß die Zinsen für 275 Thlr. geben).

§. 102.

Daraus folgt, daß bei jeder solchen Aufgabe, in welcher zwei mehrfache und eine zu dem einen mehrfachen gehörige benannte Zahl gegeben sind, die zu dem andern mehrfachen gehörige benannte Zahl aber gefunden werden soll, — daß man diese findet, wenn man die benannte Zahl durch

die Zahl des ihr zugehörigen ersten mehrfachen dividirt, und dann das, was herauskommt, mit der Zahl des andern mehrfachen multiplicirt. Da es aber immer einerlei Resultat giebt, ob man zuerst dividirt und dann multiplicirt, oder zuerst multiplicirt und dann dividirt, so kann man auch mit der letztern Zahl zuerst multipliciren, und dann, was herauskommt, durch die erstere noch dividiren. Also bei obiger ersten Aufgabe kann man 28 Thlr. zuerst mit 9 multipliciren, dann durch 7 dividiren; in der zweiten Aufgabe aber die 8 Ellen zuerst mit 10 multipliciren, dann, was herauskommt, durch 3 dividiren; endlich in der dritten Aufgabe die 4 Thlr. zuerst mit 275 multipliciren, und, was herauskommt, mit 100 dividiren.

§. 103.

Praktisch verfährt man daher auf folgende Art, wenn dergleichen Aufgaben aufgelöst werden sollen:

Man macht einen Vertikalstrich, schreibt zur rechten (was man das Multiplikationsfach nennt) die gegebene benannte Zahl hin, dann die beiden mehrfachen, eines und zwar das zur gegebenen benannten Zahl gehörige zur linken (in das Divisionsfach), das andere zur rechten (in das Multiplikationsfach), multiplicirt dann die benannte Zahl zur rechten mit der unten stehenden, und dividirt, was herauskommt, durch die Zahl zur linken.

Die obigen 3 Aufgaben sehen dann in ihrer Auflösung so aus:

1) Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	28 Thlr.
7	9
	252 Thlr. | 36 Thlr. als Resultat.
	21
	42
	42
	00

2) Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	8 Ellen
3	10
	80 Ellen | $26\frac{2}{3}$ Ellen als Resultat.
	6
	20
	18
	2

3) Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	4 Thlr Zinsen
100	275
	1100 Thlr. Zinsen | 11 Thlr als Resultat.

§. 104.

Schon im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß die zwei Haupt-Aufgaben (§. 97), auf die sich alle zurückführen lassen, gelten, es mögen die vorkommenden mehrfachen ganze Zahlen oder auch Brüche oder gemischte Zahlen seyn; folglich gilt auch das in den zunächst vorhergehenden Paragraphen gesagte sowohl für Brüche und gemischte Zahlen wie für ganze. Z. B.

$9\frac{3}{4}$ ℔ kosten 18 Thlr. was kosten $7\frac{1}{2}$ ℔?

der Ansatz giebt:

Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	18 Thlr.
$9\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$

oder

	18 Thlr.
$\frac{39}{4}$	$\frac{15}{2}$

wo man also zuerst 18 Thlr. mit dem Bruch $\frac{15}{2}$ multipliciren, dann aber, was herauskommt, durch $\frac{39}{4}$ dividiren muß. Die 18 Thlr. mit $\frac{15}{2}$ multiplicirt geben 105 Thlr., und diese durch $\frac{39}{4}$ dividirt giebt $\frac{420}{39}$ oder $10\frac{10}{13}$ Thlr. oder 10 Thlr. $23\frac{1}{13}$ Sgr.

Zu 104. Man kann dies den Schülern dadurch noch anschaulicher machen, daß man das Verfahren (§. 101) wiederholt, nämlich: a) Das $9\frac{3}{4}$ fache von 1 Pfd. kostet 18 Thlr., also das 1 fache Pfd. 18 Thlr. durch $9\frac{3}{4}$ dividirt; b) das

einfache Pfd. kostet nun so viel, folglich das $7\frac{1}{2}$ fache des Pfundes $7\frac{1}{2}$ mal so viel, also muß man 18 Thlr. zuerst durch $9\frac{3}{4}$ dividiren, dann, was herauskommt, mit $7\frac{1}{2}$ wieder multipliciren, oder, welches einerlei ist, zuerst mit $7\frac{1}{2}$ multipliciren, und dann durch $9\frac{3}{4}$ dividiren.

§. 105.

Diese hier angegebenen Aufgaben nennt man gewöhnlich Regula de tri Aufgaben, weil 3 Dinge gegeben sind, und das vierte dazu gefunden werden soll. Man sieht, wie sich ihre Auflösung auf die beiden Aufgaben (§. 97) gründet, und nie Schwierigkeiten unterworfen ist. Aber eben, weil diese Aufgaben der Regula de tri immer aus zwei solchen Multiplikations- und Divisions-Aufgaben zusammengesetzt sind, so werden auch hier die §. 98 und 99 berührten Vorsichtsmaaßregeln und Bemerkungen statt finden müssen. Sei gegeben:

1) 8 ℔ kosten 64 Thlr. 12 Sgr., was kosten 16 Loth? Hier erhält man das gesuchte Resultat nicht, wenn man 64 Thlr. 12 Sgr. mit 16 multiplicirt, und dann durch 8 dividirt; denn dividirt man durch 8, so erhält man den Preis von 1 ℔, und durch die Multiplikation mit 16 würde man dann den Preis von 16 ℔, aber nicht von 16 Loth erhalten. Man muß daher beide mehrfache 8 ℔ und 16 Loth erst auf eine gemeinschaftliche Einheit reduciren, entweder beide auf ℔ oder beide auf Loth.

Die Aufgabe würde daher entweder so:

a) 8 ℔ kosten 64 Thlr. 12 Sgr., was kostet $\frac{1}{2}$ ℔? oder so:

b) 256 Loth kosten 64 Thlr. 12 Sgr., was kosten 16 Loth? gegeben werden müssen.

2) 9 ℔ 24 Loth kosten 37 Thlr., was kosten 4 ℔ 12 Loth? — Auch hier muß man die 9 ℔ 24 Loth und 4 ℔ 12 Loth entweder beide zu ℔ oder beide zu Loth machen, und erhält daher entweder:

a) $9\frac{3}{4}$ ℔ kosten 37 Thlr., was kosten $4\frac{3}{8}$ ℔? oder

b) 312 Loth kosten 37 Thlr., was kosten 140 Loth?

3) Für 4 Thlr. 16 Sgr. bekommt man 9 ℔ 14 Loth, wieviel bekommt man für 20 Sgr? Auch hier muß man die beiden mehrfachen, nämlich 4 Thlr. 16 Sgr. und 20 Sgr. auf gleiche Benennung bringen, entweder beide zu Thlr. oder beide zu Sgr. machen, und erhält:

a) $4\frac{8}{15}$ Thlr. geben 9 ℔ 14 Loth, was geben $\frac{2}{3}$ Thlr.?

b) 136 Sgr. geben 9 ℔ 14 Loth, was geben 20 Sgr.?

Die Hauptregel, die also hieraus hervorgeht, ist folgende: die im Divisions- und Multiplikationsfach zu stehen kommenden gleichartigen mehrfachen müssen immer vorher auf gleiche Benennung gebracht werden, wenn die praktische Regel §. 102 ein richtiges Resultat liefern soll.

§. 106.

Ferner können die hier vorkommenden Aufgaben wieder von dreierlei Gattung sein, wie §. 99 schon angegeben; 1) solche, die sich direkt nach der gegebenen Regel auflösen lassen; 2) solche, die gar nicht hieher gehören, sondern anders wohin verwiesen werden müssen; 3) solche die zwar nicht hieher zu gehören scheinen, aber doch aus zweien der erstern Gattung zusammengesetzt sind, und wenigstens, als einfache Aufgaben betrachtet, auf eine ähnliche Weise gelöst werden können. Es seyen gegeben:

1) Für 7 Thlr. bekommt man 9 ℔, wieviel bekommt man für 5 Thlr.?

2) In 2 Sekunden fällt ein Stein 60 Fuß tief, wie tief wird er in 7 Sekunden fallen?

3) Ein Feld ist 17 Ruthen lang und 9 Ruthen breit, wie lang muß es seyn, wenn es denselben Flächeninhalt haben soll und nur 5 Ruthen breit ist?

Will man nun diese Aufgaben lösen, so muß man sich bei 1) fragen: bekommt man für 2 mal so viel Thlr. auch 2 mal so viel ℔? „Ja;" nun so ist diese Aufgabe eine ordentlich hieher gehörige und wird ohne weiters nach §. 102 gelöst.

Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	9 ℔
7	5
	45 | $6\frac{3}{7}$ ℔ das Resultat.
	42
	3

Eben so muß bei 2) gefragt werden; fällt der Stein in der zweifachen Zeit gerade auch 2 mal so viele Fuß tief? „Nein.“ Oder fällt er vielleicht in der 2 fachen Zeit gerade nur die Hälfte als in der einfachen Zeit? „Auch nicht;“ — nun so kann diese Aufgabe hier nicht gelöst werden. — Bei der 3ten endlich fragt man: Gehört zu der 2 fachen Breite auch die 2 fache Länge des Feldes, wenn übrigens beide Felder gleichen Flächenraum haben sollen? „Nein.“ Oder, gehört vielleicht zu der 2 fachen Breite gerade nur die Hälfte der Länge, bei gleichem Flächenraume? „Ja;“ — nun so ist dies eine umgekehrte Aufgabe, die gelöst wird, wenn man die der Regel nach in das Multiplikationsfach gehörige Zahl in das Divisionsfach schreibt, und umgekehrt, das in das Divisionsfach gehörige in das Multiplikationsfach setzt. Also der Regel §. 102 nach sollte es so stehen:

Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	17 Ruthen Länge
9	5

allein weil diese Aufgabe eine verkehrte oder umgekehrte ist, muß man so schreiben:

Divisionsfach.	Multiplikationsfach.
	17 Ruthen Länge
5	9
	153 Ruthen Länge | $30\frac{3}{5}$ Ruthen Länge.
	15
	3

Zu 106. Am anschaulichsten wird dies, wenn man wie im §. 102 die gegebene umgekehrte in die zwei einfachen umgekehrten Multiplikations- und Divisions-Exempel zerlegt, aus denen auch sie zusammengesetzt ist; nämlich

a) Bei 9 Ruthen Breite ist das Feld 17 Ruthen lang, wie lang wird es seyn bei 1 Ruthe Breite? Antwort: 9 mal so lang. Dann:

b) bei 1 Ruthe Breite ist das Feld so lang, wie man so eben gefunden, wie lang wird es seyn müssen bei 5 Ruthen Breite? Antwort: Den fünften Theil. — Folglich erhält man die gesuchte Länge, wenn man statt durch 9 zu dividiren, mit 9 multiplicirt, und statt mit 5 zu multipliciren durch 5 dividirt.

§. 107.

Da man bei den Auflösungen der Aufgaben der Regula de tri ein Divisions- und ein Multiplikationsfach bekommt, wie §. 80, überhaupt ganz dieselbe Aufgabe wie im §. 80 bei der Auflösung statt findet, so kann man die wirkliche Ausrechnung auch ganz so statt finden lassen, wie jener Paragraph es lehrt, nur mit dem Unterschiede, daß die oben stehende benannte Zahl mehrfach benannt seyn kann, und daß die Multiplikationen und Divisionen nach den §§. 94—96 verrichtet werden müssen, welche Paragraphen daher besonders in's Gedächtniß zu rufen sind. Man muß sich zurückrufen, daß man mehrfach benannte Zahlen, sowie sie sind, multipliciren und dividiren kann, daß sie aber auch, wenn man will, zuvor auf einfach benannte Zahlen gebracht, und dann erst multiplicirt oder dividirt werden können.

Um zu zeigen, wie sich dies ganze Geschäft praktisch ausnimmt, sey gegeben:

1) 9 ℔ 24 Loth kosten 13 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf., was kosten 7 ℔ 16 Loth? Erstlich kann man die zwei gleichartigen mehrfachen 9 ℔ 24 Loth und 7 ℔ 16 Loth auf die gleiche Benennung ℔ bringen und erhält nun

```
            |  13 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf.
     13 39  |   4
          3 |   7-  15 5
       2 9- |   2
          4 |   4 2   oder  5 . 2 = 10
---------------------------------------------
         13 | 137 Thlr. 26 Sgr. 8 Pf.  (10 mal)
               13
             ------
                7 |  10 Thlr.
               30
             ------
              210
               13
             ------
               80
               78 |  16 Sgr.
             ------
                2
           mal 12
             ------
         13 |  24 |  1 11/13 Pf.
               13
             ------
               11
```

daher das Resultat 10 Thlr. 16 Sgr. $1\frac{11}{13}$ Pf.

Man hätte aber die beiden gleichartigen mehrfachen 9 ℔ 24 Loth und 7 ℔ 16 Loth auch auf Lothe bringen können; dann wäre die Rechnung folgende geworden:

```
                     |  13 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf.
     9 ℔ 24 Loth     |   7 ℔     16 Loth
    32               |  32
   ----              |  ----
   288               |  224
    24               |   16
   ----              |  ----
   312               |  240  durch 8 aufgehoben;
    39               |   30  nochmals durch 3.
    13               |   10
```

Also werden die 13 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf. wieder mit 10 multiplicirt und dann durch 13 dividirt, gerade so wie solches vorher auch geschehen; und so kommt also auf diesem Wege auch dasselbe Resultat wieder heraus.

In beiden Fällen hätte man aber auch die benannte Zahl 13 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf. zuerst auf eine einfach benannte Zahl bringen können, entweder auf Thlr. oder Sgr. oder Pf., z. B.

2) $8\frac{1}{6}$ Ellen kosten 13 Thlr. 17 gGr. 4 Pf., was kosten $9\frac{1}{3}$ Ellen? Macht man die benannte Zahl 13 Thlr. 17 gGr. 4 Pf. zuerst zu Thlr. zu gGr. zu Pf., so erhält man $13\frac{13}{18}$ Thlr. oder $329\frac{1}{3}$ gGr. oder 3952 Pf. und man hat

```
              | 13
              | 13 -  Thlr. 247
              |  18
          1   |  1
   7 49  8-   |  6-   28  4
          6   |  3
     9   18   |  6  2
          3   |
----------------------------------------------
         63 | 988 Thlr. | 15 Thlr. 16 gGr. 4 4/7 Pf.
              63                      das Resultat.
             ----
             358
             315
             ----
              43
              24
             ----
             172
              86
             ----
     63   | 1032 | 16 gGr.
              63
             ----
             402
             378
             ----
              24
              12
             ----
              48
              24
             ----
    63   | 288 | 4 4/7 Pf.
             252
             ----
              36
```

Oder wenn man die $329\frac{1}{3}$ gGr. nimmt

```
             | 1
             | 329- gGr. 988
             |   3
       1     | 1
  7 49 8-    | 9- 28 4
       6     | 3
       3     | 6 2, während 2.4=8,
       3     |
--------------------------------------
7.3 oder 21 | 7904 gGr. | 376 gGr. 4 1/7 Pf.
               63
              ---
              160
              147
              ---
              134
              126
              ---
                8
```

wo aber jetzt erst noch 376 gGr. zu Thlr. gemacht werden müssen.

Dem Geiste des §. 80 gemäß sieht man auch, daß man die gGr. sogleich mit zu Thlr. macht, wenn man in das Divisionsfach zur linken noch die Zahl 24 schreibt; denn dies ist so viel, als wenn man durch 24 dividirt; das was sich dann ergiebt, sind nicht gGr. sondern Thlr.

Die Rechnung sieht so aus:

```
             | 1
             | 329- gGr. 988 Thlr.
             |   3
       1     | 1
  7 49 8-    | 9- 28 7
       6     | 3
    4 24     | 6
       3     |
       3     |
--------------------------------------
      63 | 988 Thlr.  | 15 Thlr. 16 gGr. 4 1/7 Pf.
```

Man hat hier die Rechnung nicht ausgeführt, weil derselbe Dividend und derselbe Divisor hier wie in der ersten Auflösung sich ergab; jenes also hier nur noch einmal hätte abgeschrieben werden müssen.

Nimmt man die Pf., so erhält man

	3952 Pf.	
1	1	
7 49 8-	9- 28 4	
6	3	
3	6 2	
7	31616	$4516\frac{4}{7}$ Pf. als Resultat.
	3144	

Diese $4516\frac{4}{7}$ Pf. müßte man nun wieder zu gGr. und Thlr. machen, und man erhielte dann wieder 15 Thlr. 16 gGr. $4\frac{4}{7}$ Pf.

Man hätte die Pf. auch gleich zu Thlr. machen können, indem man in das Divisionsfach zur linken die Zahlen 12 und 24 geschrieben hätte; die Rechnung wäre dann geworden:

	3952 Pf. 988	
1	1	
7 49 8-	9- 28 4	
6	3	
3 12	6	
24		
3		
63	988 Thlr.	15 Thlr. 16 gGr. $4\frac{4}{7}$ Pf.;

wo die Rechnung wieder nicht ausgeführt ist, weil Dividend und Divisor wieder dieselben geworden sind, wie in der ersten Auflösung.

Zu 106. Dieses letztere, nämlich sogleich im Ansatz durch Hinschreiben auf die eine oder die andere Seite die zu erhaltenden Pfunde, gGr., Pf. &c. auf Lothe oder Centner, Thlr. oder Pf. zu machen, ist von großer Wichtigkeit, daher besonders einzuüben. Man lasse aber den Schüler bemerken, daß wenn die benannte Zahl mehrfach benannt ist, diese mehrfach benannte Zahl erst als einfach benannt ausgedrückt werden muß, ehe man durch Unterschreiben in den Colonnen eine Reduktion bewirken kann.

§. 108.

Dies ist im wesentlichen alles, was sich über die Regula de tri sagen läßt. Wer den Geist des Ganzen, namentlich

den Umstand wohl gefaßt hat, daß die ganze Regel darin besteht, mit einer Zahl zu multipliciren und durch die andere zu dividiren, so daß man bloß früher das Multipliciren und Dividiren gelernt haben muß, um nirgends Anstoß zu finden, wird einsehen, mit welcher Leichtigkeit und Anschaulichkeit das ganze Rechnen auf diesem Wege gelehrt werden kann. — Der leichtern Uebersicht des Ganzen wegen stehe hier noch folgende gedrängte Rekapitulation:

1) Jede zur Regula de tri gehörige Aufgabe muß drei ihr wesentliche Angaben enthalten, die aber wohl zuweilen versteckt seyn können, so daß man sie erst heraussuchen muß.

2) Von diesen dreien müssen 2 immer gleichartig seyn (wir nannten diese immer die mehrfachen); das dritte ist dann eine, zu dem einen dieser gleichartigen mehrfachen gehörige, benannte Zahl, und aus ihr die zu dem andern mehrfachen gehörige benannte Zahl zu finden.

3) Die beiden gleichartigen mehrfachen bringe man als einfach benannte Zahlen unter gleiche Benennung, schreibe dann die 3te gegebene benannte Zahl in das Multiplikationsfach, die Zahl desjenigen Mehrfachen, zu dem diese gehört, in das Divisionsfach, die Zahl des anderen Mehrfachen aber wieder in das Multiplikationsfach.

4) Nun muß man untersuchen, und das unterlasse man nie, ob die gegebene Aufgabe eine direkte oder umgekehrte ist; im letztern Fall verwechselt man noch die in den Fächern stehenden Mehrfachen mit einander, so daß die in dem Multiplikationsfach stehende Zahl in das Divisionsfach kommt, und umgekehrt, die im Divisionsfach stehende in das Multiplikationsfach.

5) Die im Multiplikationsfach stehende benannte Zahl multiplicire man dann mit der unter ihr stehenden und dividire, was herauskommt, durch die im Divisionsfach stehende Zahl, beides nach §§. 94 — 96. —

Weil aber dies nichts anders ist als die Aufgabe des §. 80, so kann man alles, was dort über diese Aufgabe gesagt worden, hier in Anwendung bringen.

6) Besonders ist es ein großer Vortheil, die in irgend einem Fache vorkommenden höhern Einheiten (einfach benannte Zahlen höherer Einheiten) zu niedrigern dadurch zu machen, daß man, statt mit der Verhältnißzahl zu multipliciren, selbige bloß darunter setzt; eben so die in irgend einem Fache vorkommenden niedrigern Einheiten, erforderlichen Falls, dadurch auf höhere zu bringen, daß man statt durch die Verhältnißzahl der beiden Einheiten zu dividiren, selbige bloß in das andere Fach setzt. Z. B.

1) 8 ℔ kosten 23 Thlr., was kosten 24 Loth? giebt

	23 Thlr.
8 ℔	24 Loth.
32	

man muß nämlich entweder die 8 ℔ zu Lothen machen, damit man die mehrfachen unter einerlei Benennung hat, und da setzt man bloß die Zahl 32 unter; oder man muß die 24 Loth zu Pfunde machen, damit sie mit den 8 ℔ einerlei Benennung haben; man muß also eigentlich 24 durch 32 dividiren; statt aber mit 32 zu dividiren, setzt man diese Zahl 32 in das andere Fach (also hier zur linken), und man sieht, daß man dieselben Zahlen erhält wie vorher. — Oder

2) 8 Loth kosten 14 kr., was kosten 17 ℔? Hier hat man

	14 kr.
8 Loth.	17 ℔
	32

macht man nämlich 17 ℔ auf Lothe, so muß man mit 32 multipliciren, und dies geschieht, wenn man die 32 bloß untersetzt; man könnte aber die 8 Lothe auch auf Pfunde machen, damit sie mit den 17 ℔ gleich benannt würden, dann müßte man die 8 durch 32 dividiren; statt aber zu dividiren setzt man diese 32 bloß in das andere Fach, und so kommt dann dasselbe wie vorher.

Die erste Aufgabe giebt gelöst:

	23 Thlr.	
8	~~24~~ 3	
32		
32	69 Thlr.	2 Thlr. und $\frac{5}{32}$ Thlr. oder
	64	2 Thlr. 4 Sgr. $8\frac{1}{4}$ Pfg.
	5	

Diese Gelegenheit wollen wir zugleich ergreifen, und zeigen, wie sich derselbe §. 80 immer wieder anwenden läßt. Will man nämlich diese $\frac{5}{32}$ Thlr. zu Sgr. machen, so muß man diesen Bruch mit 30 multipliciren, d. h. man muß den Zähler 5 mit 30 multipliciren und dann durch den Nenner 32 dividiren, also hat man wieder dieselbe Aufgabe wie §. 80, nämlich:

	5	
16 ~~32~~	~~30~~ 15	
16	75	4 Sgr. und $\frac{11}{16}$ Sgr.
	64	
	11	

Multiplicirt man diese $\frac{11}{16}$ mit 12, um sie zu Pfennigen zu machen, so giebt dies noch die Rechnung:

	11	
4 ~~16~~	~~12~~ 3	
4	33	$8\frac{1}{4}$ Pfg.
	32	
	1	

es kommt also 2 Thlr. 4 Sgr. $8\frac{1}{4}$ Pfg.

Was die zweite Aufgabe betrifft, so erhält man im Resultat gute Groschen, weil die obere benannte Zahl in gGr. ausgedrückt ist; wenn man will, so kann man sie zugleich mit in Thlr. verwandeln, wenn man in das Divisionsfach noch 24 hinschreibt. Die Aufgabe wird dann, da 60 kr. einen fl. machen

	~~14~~ kr. 7	
8	17	
30 ~~60~~	~~32~~ 4	
30	476 fl.	15 fl.
	30	
	176	
	150	
	26	

dann, um die $\frac{26}{30}$ fl. zu Kreuzern zu machen,

	26
30	60 2
	52 kr.

also das gesuchte Resultat 15 fl. 52 kr.

Um noch ein auffallendes Beispiel zu geben, wie sehr bequem es ist, diese Reduktionen der höhern Einheiten auf niedrigere und umgekehrt bloß durch unterschreiben zu bewerkstelligen, siehe folgende Aufgabe: $1\frac{3}{4}$ Ctr. kostet 480 Thlr., wieviel gute Pfg.*) kosten 2 Quentchen?

Die Aufgabe sieht angesetzt so aus:

	480 Thlr.
$1\frac{3}{4}$ Ctr.	2 Quent.

Da aber die Gewichte Ctr. und Quentchen gleiche Benennung haben müssen, so macht man die Ctr. zu Quentchen, und zwar dadurch, daß man durch Untersetzen der Zahl 110 sie zuerst zu ℔ macht, durch Untersetzen von 32 diese ℔ noch zu Lothe, durch Untersetzen von 4 die Lothe zu Quentchen. Eben so, wollte man das Resultat in guten Pfg. haben; folglich macht man die 480 Thlr. durch Untersetzen von 24 und noch 12 zu Pfg. und die Aufgabe sieht jetzt so aus:

	480 Thlr.
	24
	12
$1\frac{3}{4}$	2
110	
32	
4	

und gelöst hat sie dann folgendes Aussehen:

	480	
3		
7 1-		
4	24 3	
110	12 3	
4 32	2	
4	4	
77	864 Pf.	$11\frac{17}{77}$ Pf.
	77	
	94	
	77	
	17	

*) d. h. $\frac{1}{288}$ Thlr., in so fern nämlich der Thlr. in 24 gGr. und der gGr. wieder in 12 Pfg. getheilt wird.

Zu 107. Die Sache ist so einfach und klar, daß kaum noch etwas zu bemerken übrig bleibt. Für den Lehrer daher nur folgendes im Allgemeinen:

So oft ein Paragraph citirt wird, gehe der Lehrer zu diesem angeführten zurück, noch ehe er gebraucht wird, gehe selbigen nochmals recht deutlich durch, und namentlich muß dies bei dem §. 80 geschehen. Man lasse noch eine dorthin gehörige Aufgabe machen, so daß der Schüler wieder ganz lebhaft dorthin versetzt wird; dann erst gehe man hier in seinem Vortrage weiter. Ferner vergesse und unterlasse man nicht, den Schüler bei jeder Aufgabe sich bewußt werden zu lassen dessen, was er eigentlich hier thut, und verfahre also z. B. bei letzterer Aufgabe auf folgende Art: $1\frac{3}{4}$ Ctr. sind $1\frac{3}{4}$ mal 110 mal 32 mal 4 oder $1\frac{3}{4}.110.32.4$ Quentchen; diese kosten 480 Thlr. oder 480 mal 24 mal 12 d. h. 480.24.12 Pf.; folglich erhält man, was 1 Quentchen kostet, wenn man mit dem erstern Produkt $1\frac{3}{4}.110.32.4$ in das zweite 480.24.12 Pf. dividirt, und, was 2 Quentchen kosten, wenn man das, was herauskommt, noch mit 2 multiplicirt. Es ist aber einerlei, ob man zuerst multiplicirt und dann dividirt oder umgekehrt, folglich kann man zuerst das Produkt 480 . 24 . 12 mit 2 multipliciren und dann, was herauskommt, durch $1\frac{3}{4}.110.32.4$ dividiren, und dies geschieht eben nach §. 80, der gerade diese Aufgabe auf die kürzeste Art zu lösen versucht.

Bei jeder Aufgabe, die man den Schüler machen läßt, lasse man die Zergliederung wiederholen, so daß der Schüler zuletzt die Fertigkeit bekommt, bei jeder Aufgabe selbige selbst vornehmen zu können. Eine lange Zeit hindurch fortgesetzte praktische Uebung mit beständiger Rücksicht des vorhergesagten, wird dann den Rechner vollkommen machen.

Kapitel VII.

Von der zusammengesetzten Regel de tri.

§. 109.

Ohnerachtet alle Rechnungen durch die in dem vorhergehenden Kapitel angegebene einfache Regel gelöst werden, so müssen wir doch noch einiger Aufgaben erwähnen, die zwar durch dieselbe Regel gelöst werden können und müssen, die aber aus mehreren einfachen der Art zusammengesetzt sind, so daß sich ihre Auflösung mittelst desselben §. 80 etwas vereinfachen läßt. Dergleichen Aufgaben sind folgende:

1) Wieviel machen 325 Bayerische Ellen in Danziger Ellen, da man weiß, daß 100 Bayerische $133\frac{3}{4}$ Cöllner und 400 Cöllner 415 Danziger Ellen ausmachen?

Man sieht sogleich, daß dies eigentlich 2 Regel de tri Aufgaben sind, nämlich erstens zu bestimmen, wieviel diese 325 bayerische Ellen in Cöllner Ellen ausmachen, und dann zu finden, wie viel diese Cöllner Ellen in Danziger betragen. Um die erste Aufgabe zu lösen, d. h. um die bayerischen Ellen in Cöllner zu verwandeln, muß man 325 und $133\frac{3}{4}$ mit einander multipliciren, und dann durch 100 dividiren; also kommen die beiden Zahlen $133\frac{3}{4}$ und 325 in das Multiplikationsfach, 100 aber in das Divisionsfach. Diese Zahl der Cöllner Ellen, die man dann erhält, müssen nun auf Danziger Ellen gebracht werden, indem man sie mit 415 multiplicirt und durch 400 dividirt, folglich kommt 415 in das Multiplikationsfach, 400 aber in das Divisionsfach. Der Ansatz wird dann

100	325
400	$133\frac{3}{4}$
	415

und die Rechnung

4 100	325 13
	3
16 80 400	133- 535 107
	4
4	415 83
256	115453 | $450\frac{253}{256}$ also beinahe 451 Danz. Ellen.
	1024
	1305
	1280
	253

Man sieht, daß der ganze Vortheil darin besteht, daß man zwar jede einzelne Aufgabe betrachtet, ansetzt u. s. w., damit zuletzt in der endlichen Ausrechnung der §. 80 wieder angewandt werden, und dadurch die bekannte Abkürzung, die dieser Paragraph gewährt, statt finden kann.

Wäre gegeben:

2) Wieviel machen 300 fl. Preuß. in Franken, wenn man weiß, daß 3 fl. Preuß. = 1 Thlr. Brdb., 103 Thlr. Brdb. = 100 Thlr. Sächs. (alt Geld) 5 Thlr. Sächs. = 9 fl. rhein. und 11 fl. rhein. = 24 Franks ausmachen?

Der Ansatz wird:

3	300
103	100
5	9
11	24

Zuerst werden nämlich die 300 fl. Preuß. zu Thlr. Brdb. gemacht, indem man durch 3 dividirt, daher schreibt man 300 in das Multiplikationsfach, 3 aber in das Divisionsfach. Diese Thlr. Brdb. müssen nun zu Thlr. Sächs. reducirt werden, indem man mit 100 multiplicirt und durch 103 dividirt; daher kommt 100 in das Multiplikations- und 103 in das Divisionsfach. Diese Thlr. Sächs. verwandelt man nun in fl. rhein., indem man mit 9 multiplicirt und durch 5 dividirt, daher 9 in das Fach der Multiplikation, 5 in das der Division. Zuletzt werden diese fl. rhein. in Franks verwandelt, indem man mit 24 multiplicirt und durch 11 dividirt. Man sieht, wie man also eigentlich 4 Regel de tri Aufgaben zu lösen hatte, wie man jede einzeln wirklich gelöst, aber nicht

wirklich ausgerechnet hat, damit jetzt, wo alle Zahlen auf der rechten Seite mit einander, eben so alle Zahlen auf der linken Seite mit einander multiplicirt werden, und dann mit dem Produkt zur linken in das zur rechten dividirt wird, gedachter §. 80 angewandt werden kann; die Rechnung selbst wird jetzt:

3	300	100
103	100	20
5	9	
11	24	
1133	432000	$381\frac{237}{1133}$ Franken.
	3399	
	9210	
	9064	
	1460	
	1133	
	327.	

§. 110.

Außer den Aufgaben des vorhergehenden Paragraphen können auch noch folgende vorkommen:

1) 1200 Menschen reichen 4 Monat hindurch mit 2400 Ctr. Mehl, wieviel Menschen werden mit 4000 Ctr. 3 Monate lang ausreichen?

Auch diese besteht aus 2 Regel de tri Aufgaben; erstens muß man nämlich berechnen, wieviel Menschen mit den 4000 Ctr. in derselben Zeit von 4 Monaten ausreichen würden; dann, wenn die so eben erhaltene Anzahl Menschen 4 Monate lang ausreicht, wieviel Menschen mit derselben Quantität 3 Monate lang genug haben werden? Die erste Aufgabe ist direkt, dann das 2 fache Quantum ernährt auch 2 mal so viel Menschen; die zweite aber ist umgekehrt, denn in der 2 fachen Zeit kann nur die Hälfte der Menschen genährt werden. Um die erste aufzulösen, müssen 1200 und 4000 mit einander multiplicirt, und durch 2400 dividirt werden. Wäre die zweite direkt, so müßte man die Menschenzahl, die man so eben erhalten, mit 3 multipliciren und durch 4 dividiren, da sie aber umgekehrt ist, so wird mit 4 multiplicirt und durch 3 dividirt. Der Ansatz wird daher:

	1200
2400	4000
3	4

und die Rechnung

2	1200	
2400	4000	2000
3	4	
3	8000	$2666\frac{2}{3}$ Mann.

Es sey nun folgende Aufgabe gegeben:

2) Von 36 Arbeitern, welche täglich 8 Stunden angestellt sind, ward in 40 Tagen ein Graben vollendet von 720 Schuh Länge, 4 Schuh Tiefe und $8\frac{1}{2}$ Schuh mittlerer Breite. Wieviel Schuh Länge bei 1 Schuh Breite und Tiefe (wieviel Kubikschuhe) würden 5 Arbeiter täglich bei 10 Stunden Arbeit ausgraben?

Diese Aufgabe besteht aus 5 Regel de tri Aufgaben:

1) Wenn alles übrige wie das erste mal bleibt, wieviel Schuh Länge werden 5 Arbeiter statt der 36 ausgraben?
2) Wieviel Schuh Länge werden die 5 Arbeiter ausgraben, wenn jeder statt 8 Stunden jetzt täglich 10 Stunden arbeitet?
3) Wieviel Schuh Länge werden unter denselben Umständen ausgegraben werden, wenn statt der 40 Tage nur 1 Tag gearbeitet wird?
4) Wieviel Schuh Länge werden unter denselben Umständen gegraben werden, wenn statt 4 Schuh Tiefe nur 1 Schuh Tiefe gemacht werden soll? Endlich
5) Wieviel Schuh Länge wird ausgegraben werden, wenn ausser den vorhergehenden allen auch noch die $8\frac{1}{2}$ Schuh Breite in 1 Schuh Breite umgewandelt wird?

Die ersten 3 Aufgaben sind direkt, die letzten beiden aber verkehrt, daher der Ansatz folgender:

	720
36	5
8	10
40	
1	4
1	$8\frac{1}{2}$

und die Rechnung

	720 90 5	
2 36	5	
8	10	
40	1	
1	4	
1	1	
	8- 17	
2	2	
4	425	106¼ Schuh Länge.

Zu 109. So wie diese letzte Aufgabe zergliedert und behandelt wurde, so lasse man jede solche und ähnliche gegebene immer und ohne Ausnahme in die Regel de tri Aufgaben zergliedern, aus denen sie besteht, und dann durch Ansatz und Auflösung den zusammengesetzten Ansatz entwickeln, auf welchen sich der §. 80 anwenden läßt. Es kann kommen, daß unter den Regel de tri Aufgaben solche vorkommen, die gar nicht in das Gebiet der gemeinen Rechenkunst gehören; dann gehört die ganze Aufgabe nicht hieher. Es kann auch kommen, daß manche erst durch leichte Umwandlung zu hieher gehörigen Regel de tri Aufgaben gemacht werden müssen.

Dahin gehören die einfachen Regel de tri Aufgaben, die unter der Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung, Konkursrechnung, Rabattrechnung, der Fusti= und Havereirechnung, der Tararechnung u. dergl. m. vorkommen; und die ein jeder, der nach vorstehender Anweisung unterrichtet worden, ohne weiters in jedem vorkommenden Fall wird auflösen können.

Aufgaben.

A. Zum vierten Kapitel.

1) Die Brüche $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{3}{16}$ und $\frac{11}{16}$ zu addiren.

2) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{6}{8}$ zu finden.

3) $\frac{9}{16}-\frac{3}{16}$ zu bestimmen.

4) Man soll $\frac{11}{32}$ von $\frac{10}{32}$ subtrahiren.

5) Aus den Brüchen $\frac{12}{5}$, $\frac{129}{17}$, $\frac{53}{18}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{437}{24}$, $\frac{739}{112}$, $\frac{9764}{1769}$, $\frac{10107}{237}$, $\frac{89764}{9760}$, die Ganzen herauszufinden, und umgekehrt die herausgekommenen gemischten Zahlen wiederum in Brüche zu verwandeln.

6) Man soll jeden der Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{107}{112}$, $\frac{1708}{1818}$, $\frac{9736}{8415}$, mit der Zahl 57 multipliciren, oder die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{237}{1008}$ mit 4 multipliciren.

7) Man soll die Brüche $\frac{399}{8}$, $\frac{95}{2}$, $\frac{342}{11}$, $\frac{152}{5}$, $\frac{6099}{112}$, $\frac{16207}{303}$ durch 57 dividiren, auch $\frac{7}{2}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{237}{252}$ durch 4 dividiren.

8) Die Summen $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}$, $\frac{7}{16}+\frac{9}{32}$, $\frac{17}{24}+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}$, $\frac{6}{25}+\frac{8}{15}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}$, $\frac{17}{84}+\frac{13}{63}+\frac{29}{56}+\frac{19}{42}+\frac{31}{32}$ zu finden, d. h. die hier in jedem Beispiele stehenden Brüche zu addiren.

9) Die Differenzen $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}-\frac{5}{16}$, $\frac{9}{16}-\frac{7}{24}$ zu finden, d. h. $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{16}$ von $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{24}$ von $\frac{9}{16}$ subtrahiren.

10) Man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$, eben so $\frac{7}{8}$ mit $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$ mit $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{5}$ mit $\frac{3}{4}$ und, was herauskommt, noch mit $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$ mit $\frac{3}{5}$ und, was herauskommt, noch mit $\frac{4}{7}$ multipliciren.

11) Man soll 4 durch $\frac{2}{3}$, 19 durch $\frac{3}{4}$, 57 durch $\frac{3}{7}$ dividiren.

12) Man soll $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$ durch $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ durch $\frac{14}{15}$ dividiren.

13) $9\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $19\frac{5}{8}$ zu addiren, desgleichen $117\frac{1}{3}+207\frac{3}{5}+19\frac{1}{2}$ finden.

14) Von $17\frac{1}{5}$ abzuziehen $9\frac{3}{4}$, oder von $19\frac{1}{2}$ abzuziehen $7\frac{4}{5}$, oder $140\frac{2}{5} - 56\frac{13}{15}$ auszurechnen.

15) $9\frac{3}{4}$ mit $7\frac{1}{2}$ zu multipliciren, desgleichen die Produkte $17\frac{4}{5} \bowtie 19\frac{5}{6}$, $3\frac{3}{8} \bowtie 9\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4} \bowtie 5\frac{7}{8}$ zu finden.

16) $9\frac{3}{4}$ durch $7\frac{1}{2}$ zu dividiren, desgleichen $6\frac{4}{5}$ durch $9\frac{7}{8}$.

17) Man soll das Produkt $7\frac{1}{2} \cdot 9\frac{4}{5} \cdot 24 \cdot 36 \cdot \frac{5}{7}$ durch das Produkt $6 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6\frac{2}{5}$ dividiren.

B. Zum fünften Kapitel.

18) Jemand hat folgende Vorräthe von Roggen liegen, 435 Scheffel 11 Metzen, 219 Scheffel 15 Mtz. 3 Viert., 37 Sch. 5 Mtz. 2 Viert. und noch 195 Sch. 12 Mtz. 2 Viert., wieviel beträgt es zusammen? — 1 Scheff. = 16 Metz. = 64 Viert.

19) Drei Fuhren mit Waizen halten 22 Sch. 11 Mtz., 23 Sch. 14 Mtz., 14 Sch. weniger 4 Mtz.; wieviel beträgts zusammen?

20) Ein Fleischer hat 32 Ochsen geschlachtet, und von denselben an Unschlitt (Talg) erhalten 5 Ctr. 48 ℔, 4 Ctr. 26 ℔, 5 Ctr. 15 ℔, 8 Ctr. 21 ℔, 6 Ctr. 19 ℔, 7 Ctr. 37 ℔. Was beträgt es zusammen? — 1 Ctr. = 110 ℔.

21) Ein Wirth hatte 33 Sch. 12 Mtz. Hafer im Vorrath. Davon hat er in 4 Monaten 16 Sch. $14\frac{1}{2}$ Mtz. verkauft. Wieviel hat er noch übrig?

22) Ein Kaufmann zieht seine Bilanz, und findet, daß er an Waaren, baarem Gelde und ausstehenden Schulden 8365 fl. 24 kr. 1 pf. habe, selbst aber 5278 fl. 29 kr. 2 pf. schuldig sey, wie groß ist sein Vermögen?

23) Ein Handelsmann findet in seinen Büchern, daß ihm einige Abnehmer folgende Posten schuldig geblieben sind: 37 fl. 26 kr. 2 pf., 55 fl. 18 kr., 64 fl., 23 fl. 21 kr. 1 pf., 16 fl. 4 kr., 72 fl. — kr. 3 pf., 114 fl. 25 kr. — Er ist dagegen folgende Posten schuldig: 42 fl. 16 kr., 26 fl. 8 kr., 12 fl. 13 kr. 1 pf., 25 fl., 51 fl. 27 kr. 2 pf., 32 fl. 16 kr., 45 fl., wieviel wird ihm nach Einkassirung

seiner ausstehenden Schulden und Bezahlung seiner eigenen noch übrig bleiben?

24) 7 Ctr. 36 ℔ 8 Loth, wieviel machen sie als einfach benannte Zahl im Ctr. allein, oder ℔ allein, oder in Lothen?

25) 7 Thlr. 16 gGr. 8 Pf., wieviel machen sie in Thlr. allein, oder gGr. allein, oder in Pf.?

26) 9 fl. 16 kr. 2 pf. als einfach benannte Zahlen auszudrücken in pf., in kr. und auch in fl.

27) 9 Scheffel 12 Metzen 3 Viertel als einfach benannte Zahl auszudrücken in Vierteln, in Metzen und auch in Scheffeln.

28) 17 ℔ 16 Loth 3 Quentchen als einfach benannte Zahlen auszudrücken in Quentchen, in Lothen und in Pfunden.

29) 7 Thlr. 15 Sgr. 4 Pf. auszudrücken in Pfg., in Sgr. und in Thlrn. allein.

30) 19 Thlr. 10 Sgr. 9 Pf. auf Pfg. zu bringen, auch auf Sgr., auch auf Thlr.

31) 17 fl. 5 kr. 2 pf. auf Pfg. zu bringen, auf Sgr. und auch auf Thlr.

32) 25800 Lothe, wieviel Ctr., ℔ und Lothe machen sie?

33) 2216 Spfg., wieviel machen sie in Thlrn., Sgr. und Pf.?

34) 7860 pf. rhn., wieviel machen sie in fl., kr. und pf.?

35) 627 Viertel Roggen, wieviel machen sie Scheffel, Metzen und Viertel?

36) 2243 Quentchen, wieviel Ctr., ℔, Lothe und Quentchen?

37) 705 kr. rhn., wieviel machen sie in fl. und kr.?

38) 5577 Spf., wieviel Thlr., Sgr. und Pf.?

39) 9282 pf. rhn., wieviel fl., kr. und pf.?

40) $806\frac{1}{4}$ ℔ in Ctr., ℔ und Lothen anzugeben.

41) $184\frac{2}{3}$ gGr. in Thlr., gGr. und Pf. auszudrücken.

42) Die einfach benannte Zahl $286\frac{2}{3}$ kr. rhn. in eine mehrfach benannte Zahl von fl., kr. und pf. auszudrücken.

43) $156\frac{3}{4}$ Metzen; wieviel Scheff., Mtz. und Viert.?

44) $560\frac{3}{4}$ Lothe; wieviel Ctr., ℔, Lothe und Quentchen?

45) $23\frac{11}{12}$ fl. rhn.; wieviel fl. und kr.?

46) $464\frac{3}{4}$ Sgr.; wieviel Thlr., Sgr. und Pf.?

47) $515\frac{2}{3}$ kr. rhn.; wieviel fl. und kr. rhn.?

48) $7\frac{29}{88}$ Ctr.; wieviel Ctr., ℔ und Lothe?
49) $7\frac{25}{36}$ Thlr.; wieviel Thlr., Sgr. und Pf.?
50) $9\frac{5}{9}$ fl. rhn.; wieviel fl., kr. und pf.?
51) $9\frac{51}{64}$ Scheffel; wieviel Scheff., Metz. und Viert.?
52) $17\frac{67}{128}$ ℔; in ℔, Lothe und Quentchen?
53) $7\frac{5}{16}$ Thlr.; in Thlr., Sgr. und Pf.?
54) $19\frac{35}{96}$ Thlr.; in Thlr., gGr. und Pf.?
55) $5\frac{197}{270}$ fl.; in fl., kr. und pf. (rhn.)?
56) $\frac{2243}{14080}$ Ctr.; wieviel ℔, Lothe und Quentchen?
57) Wer jährlich 400 Thlr. zu verzehren hat, wieviel kann er wöchentlich auf sich wenden?
58) Wer täglich einen Sgr. erspart, wieviel beträgt dies in einem Jahre oder 365 Tagen?
59) Wieviel Stunden hat ein Jahr von 365 Tagen?
60) Wenn aus einer Kanone 67 Schüsse von 3 Ctr. Pulver geschehen sollen, wieviel Pulver kommt auf einen Schuß?
61) Wer wöchentlich 3 ℔ 16 Loth ißt, wieviel ißt er des Jahres?
62) Was kosten 7 Taglöhner in einem Vierteljahr, wenn jeder wöchentlich 1 Thlr. 15 Sgr. erhält?
63) 2 Dutzend silberne Löffel, deren einer 2 Loth 3 Qu. $3\frac{1}{2}$ Pf. wiegt, wieviel wiegen alle zusammen?
64) Ein Regent hat 93251 Thlr. 17 gGr. jährliches Einkommen, wieviel kommt auf einen Tag?
65) Ein Bäcker hat in 26 Wochen 23 Scheffel 8 Metzen Roggen verbacken, wieviel kommt auf den Tag?
66) Eine Summe von 362 fl. 24 kr. soll in 12 Terminen abgetragen werden, wieviel ist für jeden Termin zu bezahlen?
67) 1 ℔ kostet 7 fl. 21 kr., was kosten 37 ℔ 24 Loth?
68) 29 ℔ 8 Loth kosten 115 fl. 28 kr. 2 pf., was kostet 1 ℔?
69) 1 Thlr. ist soviel als $1\frac{3}{1}$ fl. rhn., wieviel fl. rhn. machen 247 Thlr. 18 Sgr.?
70) Wieviel Thlr. machen 9754 fl. rhn., wenn 1 Thlr. zu $1\frac{4}{5}$ fl. rhn. gerechnet wird?
71) Wieviel Gulden Münze machen 153 fl. 6 kr. rhn. (W. W.), da man weiß, daß 1 fl. Münze soviel als $2\frac{1}{2}$ fl. rhn. ist?
72) Umgekehrt: wieviel fl. rhn. machen 17 fl. 18 kr. Münze?

73) Wieviel Thorner Ellen machen $237\frac{1}{3}$ Berliner Ellen, da 1 Berliner Elle $1\frac{1}{5}$ Thorner Ellen ausmacht?

74) Umgekehrt: wieviel Berliner Ellen machen $629\frac{5}{6}$ Thorner Ellen?

75) Wieviel Sgr. machen 2345 gGr.?

76) Umgekehrt: wieviel gGr. machen 7249 Sgr.?

77) 1 Ctr. 78 Pfd. kosten 123 Thlr. 14 Sgr., was kostet 1 Pfd. — Der Ctr. zu 110 Pfd. gerechnet?

78) Für 1 Thlr. 7 gGr. bekommt man 3 Pfd. 16 Loth, wieviel für 1 gGr.?

79) 1 Quentchen kostet 4 Sgr. 1 Pf., was kostet 1 Ctr. 17 Pfd.?

80) 117 Pfd. 29 Loth kosten 4739 Thlr., was kostet 1 Qu.?

81) Was kosten 19 Ellen $2\frac{1}{2}$ Viertel Leinwand, die Elle zu $8\frac{1}{2}$ Sgr.?

82) 16 Ellen weniger $\frac{1}{2}$ Drittel Leinwand, die Elle zu $8\frac{1}{2}$ Sgr.?

83) 11 Pfd. $1\frac{1}{2}$ Viertel kosten 8 fl. 20 kr. rhn., was 1 Pfd.?

84) Ein Faß Zucker wiegt netto 10 Ctr. 78 Pfd., kostet 500 fl. rhn., wie hoch kommt das Pfd., das Viertel Pfd. und das Loth? — 1 Ctr. = 100 Pfd.

C. Zum sechsten Kapitel.

85) 6 Loth Schnupftabak kosten 13 Sgr., was kosten $3\frac{1}{4}$ Loth?

86) An 17 Ctr. 55 Pfd. Waare trockneten 27 Pfd. 18 Lothe ein, wieviel werden an 26 Ctr. 33 Pfd. eintrocknen? — 1 Ctr. zu 110 Pfd. gerechnet.

87) Wieviel tragen 7345 Thlr. 18 Sgr. jährliche Zinsen zu 5 proC. gerechnet?

88) Wie groß ist das Kapital, von welchem man jährlich zu $7\frac{1}{2}$ proC. 417 Thlr. 14 Sgr. Zinsen bekommt?

89) Wieviel verliert man jährlich an diesen Zinsen, wenn man plötzlich statt $7\frac{1}{2}$ proC. nur $2\frac{3}{4}$ proC. erhält?

90) Wie groß müßte jetzt das Kapital seyn, um doch noch die alten Zinsen beziehen zu können?

91) Jemand kauft für 2735 Thlr. 6 gGr. Waizen und gewinnt $17\frac{1}{2}$ proC. daran, wieviel hat er wieder dafür erhalten?

92) Wenn dies 617 Scheffel 9 Metzen waren, wie theuer hat er den Scheffel eingekauft und wie theuer wieder verkauft? — 1 Scheffel = 16 Metzen.

93) Ein anderer kaufte 510 Scheffel 8 Metzen und verkaufte sie mit $22\frac{1}{2}$ proC. Verlust um 1967 Thlr. 18 gGr., wieviel hat er dafür gegeben? (NB. Da das Procent Gewinn oder Verlust immer nur für die Verlags- oder Einkaufs-Summe gerechnet wird, so kann man nicht sagen, daß er für Hundert, die er erhält, $22\frac{1}{2}$ verliere, sondern für Hundert, die er ausgelegt hat. Für diese bekommt er aber nur $77\frac{1}{2}$; folglich muß man sagen: an $77\frac{1}{2}$ Thlr., die er erhält, verliert er $22\frac{1}{2}$ Thlr., wieviel verliert er an der ganzen Verkaufssumme? oder auch $77\frac{1}{2}$ Thlr., die er erhält, kosteten ihm 100 Thlr., wieviel mußte er für die ganze Verkaufssumme geben?)

94) Wie hoch kaufte er den Scheffel, wie theuer verkaufte er ihn wieder?

95) An einer Ladung Getreide gewann man $35\frac{1}{4}$ proC., erhielt 8750 Thlr., wie groß war die Ankaufssumme?

96) Wenn der Cours der Friedrichsd'or $110\frac{1}{2}$ steht, wieviel ist das Stück werth? (NB. Man muß sagen: für 100 Thlr. Gold bekommt man $110\frac{1}{2}$ Thlr. Courant, wieviel für 5 Thlr. Gold?)

97) Wenn man für 1 Louisd'or 5 Thlr. 10 Sgr. erhält, zu welchem Cours sind sie gerechnet? d. h. wieviel bekommt man für 100 Gold, oder vielmehr, wieviel bekommt man über 100 Thlr. dafür?

98) Eine Elle $\frac{5}{4}$ breites Tuch kostet 2 Thlr. 15 Sgr., wie theuer ist ein Stück von 50 Ellen Länge und $\frac{7}{4}$ Breite, das gleiche Güte hat?

99) Zur Pflasterung eines Saales gebraucht man 2000 Steine, wenn jeder derselben 6 Zoll lang und $5\frac{1}{2}$ Zoll breit ist; wieviel, wenn jeder Stein $6\frac{1}{4}$ Zoll lang und 4 Zoll breit ist?

100) Ein Laufer läuft in 7 Stunden 4 Meilen, ein anderer in 9 Stunden 5 Meilen, welcher läuft geschwinder?

101) Ein Bauer hat 116 Garben in seine Scheuer gebracht, nachdem er den Zehenden davon gegeben, wieviel waren auf dem Felde? (NB. Wenn 9 in der Scheuer, waren 10 auf dem Felde.)

102) 6 Pferde kann man mit 19 Scheffel Hafer $\frac{1}{2}$ Jahr lang halten, wie lange 10 Pferde?

103) Ein Fuhrmann fährt einen Ctr. um einen gewissen Lohn 24 Meilen weit, wie weit wird er 54 Ctr. um gleichen Lohn fahren müssen?

104) Von einer Quantität Garn erhält man 45 Ellen Leinwand $1\frac{1}{2}$ Elle breit, wieviel Ellen wird man erhalten, wenn die Leinwand $1\frac{3}{4}$ Elle breit wird?

105) 3000 Mann einer Besatzung haben auf 7 Monate Proviant, wieviel müssen abmarschieren, wenn die übrigen ein ganzes Jahr auskommen sollen?

106) Wenn $8\frac{1}{2}$ Ctr. $38\frac{1}{2}$ Thlr. kosten, und vom Ctr. noch 3 Thlr. 15 Sgr. Fracht gegeben werden muß, wie hoch kommt das Pfd.?

107) $13\frac{3}{4}$ Ctr. kosten $125\frac{1}{8}$ Thlr., was kosten $25\frac{1}{2}$ Ctr.?

108) $\frac{2}{5}$ Ctr. kosten $\frac{5}{8}$ Thlr., was kosten $\frac{3}{4}$ Ctr.?

109) 2 Pfd. $6\frac{1}{2}$ Loth kosten 3 Thlr. $26\frac{1}{2}$ Sgr., was kosten 7 Pfd. $3\frac{1}{4}$ Loth?

110) Eine Elle Tuch kostet in Berlin 3 Thlr. 8 Sgr., was muß sie in Thorn kosten, wo die Elle kleiner ist, indem ohngefähr 5 Berliner 6 Thorner Ellen ausmachen?

D. Zum siebenten Kapitel.

111) Wenn der Scheffel Roggen in Berlin 2 Thlr. 6 Sgr. kostet, wieviel fl. rhein. wird der bayerische Scheffel betragen? (NB. 2455 bayerische Scheffel machen 10000 Berliner Scheffel, und 7 fl. rhein. sind 4 Thlr.)

112) Wenn der bayerische Scheffel Roggen im Jahr 1817 zu Nürnberg $48\frac{1}{2}$ fl. gekostet hat, wie hoch kommt der Berliner Scheffel in Thlrn.?

113) Ein Kaufmann verkauft das Loth gebrannten Kaffee zu 9 Spf., der Ctr. hat ihm ungebrannt 57 Thlr. gekostet, wieviel Procent gewinnt er daran? (NB. 3 Loth gebrannten Kaffees erfordern 4 Loth ungebrannten.)

114) Einer hat einen Getraideboden 36 Schuh lang, 22½ Schuh breit, auf den man 145 Scheffel Korn aufschütten kann, wieviel wird man auf einen andern aufschütten können, der 20 Schuh lang und 13½ Schuh breit ist?

115) Ein Stück Feld ist 54 Schritt lang und 18 breit. Dasselbe zu bearbeiten braucht man auf 9 Tage 15 Personen. Wie lange werden 27 Personen zu arbeiten haben an einem Felde von 24 Schritten breit und 75 lang?

116) Es haben 2000 Mann in einer Festung auf 4 Wochen Proviant, wenn jeder täglich 2¼ Pfd. Brod erhält. Es kommen aber noch 400 Mann dazu, und doch soll man sich 5 Wochen lang zu halten suchen; wieviel Brod wird nun jeder bekommen können?

117) Bei Schanzarbeiten rechnet man, daß 1 Mann täglich 10 Stunden arbeiten und darin 216 Kubikschuh (oder eine Kubikklafter) Erde ausgraben könne. Wieviel Stunden müßten 60 Arbeiter den Tag hindurch arbeiten, wenn sie mit einem Graben von 208000 Kubikschuhen in 20 Tagen fertig werden sollten?

Resultate,

die sich bei den Uebungsaufgaben ergeben.

---

1) $\frac{26}{16}$ oder $1\frac{5}{8}$.
2) $\frac{25}{8}$ oder $3\frac{1}{8}$.
3) $\frac{6}{16}$ oder $\frac{3}{8}$.
4) $\frac{8}{32}$ oder $\frac{1}{4}$.
5) Bezüglich $2\frac{2}{5}$, $7\frac{10}{17}$, $2\frac{17}{18}$, $4\frac{1}{7}$, $18\frac{5}{21}$, $6\frac{67}{112}$, $5\frac{919}{1769}$, $42\frac{153}{237}$, $9\frac{1924}{9760}$ oder $9\frac{481}{2410}$.
6) Giebt bezüglich $49\frac{7}{8}$, $47\frac{1}{2}$, $31\frac{1}{11}$, $30\frac{2}{5}$, $54\frac{51}{112}$ und $53\frac{148}{303}$ und dito $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$, $\frac{19}{6}$ oder $3\frac{1}{6}$, $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{237}{252}$.
7) Giebt bezüglich $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{107}{112}$, $\frac{1706}{1818}$, $\frac{9736}{8415}$ und $\frac{7}{8}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{237}{1008}$.
8) Bezüglich $\frac{22}{8}$ oder $2\frac{3}{4}$, $\frac{23}{32}$, $1\frac{19}{18}$, $\frac{697}{300}$ oder $2\frac{97}{300}$, $\frac{4733}{2016}$ oder $2\frac{701}{2016}$.
9) Bezüglich $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{13}{48}$.
10) Bezüglich $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{35}$.
11) 6, $\frac{76}{3}$ oder $25\frac{1}{3}$, 133.
12) $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{15}{16}$.
13) $36\frac{7}{8}$, $344\frac{9}{10}$.
14) $7\frac{9}{20}$, $11\frac{7}{10}$, $73\frac{8}{15}$.
15) $46\frac{1}{8}$, $353\frac{1}{30}$, $32\frac{1}{16}$, $39\frac{21}{32}$.
16) $1\frac{3}{10}$, $\frac{272}{395}$.
17) 225.
18) 888 Scheff. 12 Mtz. 3 Viert.
19) 60 Scheff. 5 Mtz.
20) 36 Ctr. 56 ℔.
21) 16 Scheff. $13\frac{1}{2}$ Mtz.
22) 3086 fl. 54 kr. 3 pf.
23) 148 fl. 14 kr. 3 pf.
24) $7\frac{29}{88}$ Ctr.; oder $806\frac{1}{4}$ ℔; oder 25800 Lth.

25) $7\frac{23}{36}$ Thlr.; oder $184\frac{2}{3}$ Sgr.; oder 2216 Pf.
26) $9\frac{11}{40}$ fl.; oder $556\frac{1}{2}$ kr.; oder 2226 pf.
27) $9\frac{51}{64}$ Scheff.; oder $156\frac{3}{4}$ Mtz.; oder 627 Viert.
28) $\frac{2243}{11080}$ Ctr.; oder $17\frac{67}{128}$ ℔; oder $560\frac{3}{4}$ Lth.; oder 2243 Quent.
29) $7\frac{23}{15}$ Thlr.; oder $225\frac{1}{3}$ Sgr.; oder 2704 Spfg.
30) 6969 Pf.; oder $580\frac{3}{4}$ Sgr.; oder $19\frac{43}{120}$ Thlr.
31) 4102 Pf.; oder $1025\frac{1}{2}$ kr.; oder $17\frac{11}{120}$ Thlr.
32) 7 Ctr. 36 ℔ 8 Lth.
33) 6 Thlr. 4 Sgr. 8 Pf.
34) 32 fl. 45 kr.
35) 9 Scheff. 12 Mtz 3 Viert.
36) 17 ℔ 16 Lth. 3 Quent.
37) 11 fl. 45 kr.
38) 15 Thlr. 14 Sgr. 9 Pf.
39) 38 fl. 40 kr. 2 pf.
40) 7 Ctr. 36 ℔ 8 Lth.
41) 7 Thlr. 16 gGr. 8 Pf.
42) 4 fl 46 kr. $2\frac{2}{3}$ pf.
43) 9 Scheff. 12 Mtz. 3 Viert.
44) 17 ℔ 16 Lth. 3 Quent.
45) 23 fl. 55 kr.
46) 15 Thlr. 14 Sgr. 9 Pf.
47) 8 fl. 35 kr. $2\frac{2}{3}$ pf.
48) 7 Ctr. 36 ℔ 8 Lth.
49) 7 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf.
50) 9 fl. 33 kr. $1\frac{1}{3}$ pf.
51) 9 Scheff. 12 Mtz. 3 Viert.
52) 17 ℔ 16 Lth. 3 Quent.
53) 7 Thlr. 9 Sgr. $4\frac{1}{2}$ Pf.
54) 19 Thlr. 8 gGr. 9 Pf.
55) 5 fl. 43 kr. $3\frac{1}{9}$ pf.
56) 17 ℔ 16 Lth. 3 Quent.
57) 7 Thlr. 20 Sgr. $9\frac{3}{13}$ Pf.
58) 12 Thlr. 5 Sgr.
59) 8760.
60) 4 ℔ $29\frac{31}{67}$ Lth.

61) 182 ℔.
62) 136 Thlr. 15 Sgr.
63) 2 ℔ 7 Lth. 1 Quent.
64) 255 Thlr. 14 Sgr. $5\frac{43}{73}$ Pf.
65) 14 Mtz. $1\frac{3}{13}$ Viert.
66) 30 fl. 12 kr.
67) 277 fl 27 kr. 3 pf.
68) 3 fl. 56 kr. $3\frac{19}{39}$ pf.
69) 433 fl. 18 kr.
70) $5418\frac{8}{9}$ Thlr. oder 5418 Thlr. 21 gGr. 4 Pf.
71) 61 fl. 14 kr. $1\frac{3}{5}$ pf. Münze.
72) 43 fl. 15 kr. Rhein. oder Wiener Währung.
73) $284\frac{4}{5}$ Thorner Ellen.
74) $524\frac{31}{36}$ Berliner Ellen.
75) $2931\frac{1}{4}$ oder 97 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf.
76) $5799\frac{1}{5}$ oder 241 Thlr. 15 gGr. $2\frac{2}{5}$ Pf.
77) 19 Sgr. $8\frac{20}{47}$ Pf.
78) 3 Lth. $2\frac{14}{31}$ Quent.
79) 2212 Thlr. 18 Sgr. 8 Pf.
80) 9 Sgr. $4\frac{2931}{3773}$ Pf.
81) 5 Thlr. 16 Sgr. $9\frac{3}{4}$ Pf.
82) 4 Thlr. 14 Sgr 7 Pf.
83) 43 kr. $3\frac{75}{91}$ pf. rhn.
84) 27 kr $3\frac{176}{539}$ pf.; 6 kr. $3\frac{1793}{2156}$ pf.; $3\frac{8261}{17248}$ pf.
85) 7 Sgr. $\frac{1}{2}$ Pf.
86) 41 ℔ 13 Lth. $2\frac{2}{25}$ Quent.
87) 367 Thlr. 8 Sgr. $4\frac{4}{5}$ Pf.
88) 5566 Thlr 6 Sgr. 8 Pf.
89) 264 Thlr. 11 Sgr. $10\frac{2}{5}$ Pf.
90) 15180 Thlr. 18 Sgr. $2\frac{2}{11}$ Pf.
91) 3212 Thlr 22 gGr. $\frac{3}{5}$ Pf.
92) 4 Thlr. 10 gGr. $3\frac{5757}{9881}$ Pf eingek.
5 Thlr. 4 gGr. $10\frac{39998}{49405}$ Pf. verkauft.
93) 2539 Thlr. — gGr. $9\frac{9}{31}$ Pf.
94) 4 Thlr. 29 Sgr. $2\frac{15910}{31651}$ Pf. eingek.
3 Thlr. 25 Sgr. $7\frac{703}{1021}$ Pf. verkauft.
95) 6469 Thlr. 12 gGr. $\frac{144}{541}$ Pf.

96) 5 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf.
97) $6\frac{2}{3}$ Procent.
98) 97 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf.
99) 2640 Steine.
100) Der erstere läuft in 9 Stunden $5\frac{1}{7}$ Meile.
101) $128\frac{8}{9}$ Garben.
102) $15\frac{3}{5}$ Wochen.
103) 8 Meilen.
104) $38\frac{4}{7}$ Ellen.
105) 1250 Mann.
106) 8 Thlr. — Sgr. $10\frac{10}{17}$ Pf. der Ctr.; und das Pfund 2 Sgr. $2\frac{52}{187}$ Pf.
107) 232 Thlr. 1 Sgr. 6 Pf.
108) 1 Thlr 5 Sgr. $1\frac{7}{8}$ Pf.
109) 12 Thlr. 15 Sgr. $6\frac{15}{47}$ Pf.
110) 2 Thlr. 21 Sgr. 8 Pf.
111) 15 fl. 40 kr. $3\frac{367}{491}$ pf.
112) 6 Thlr. 24 Sgr. $\frac{972}{1000}$ Pf.
113) $15\frac{45}{57}$ Procent.
114) $48\frac{1}{3}$ Scheffel.
115) $9\frac{14}{54}$ Tag.
116) $1\frac{1}{2}$ ℔.
117) $8\frac{2}{81}$ Stunden.

Anhang.

Tabellen zur Vergleichung

der

Längen-, Flächen- und Körper- (der festen und der Hohl-) Maaße, sowie der Gewichte verschiedener Länder und namentlich der Zollvereins-Staaten.

Vergleichung einiger Fuß-Maaße.

1 Paris. Fuß = 12 Paris. Zoll = 144 Paris. Linien
1 Franz. Meter = 3,078444 Paris. Fuß,
1 Paris. Fuß = 0,324839 Meter.

Namen der Maaße.	Pariser Linien.
Amsterdam, Fuß	125, 4776
Brandenburg (Preuß., Berl.) Fuß	139, 13
Dänemark	eben so
Darmstadt, Fuß	127, 6
Frankfurt am Main	126, 162
Griech. Olymp. Fuß	137
Hamburg, Fuß	127.
Karlsruhe, Fuß	129
Leipzig, gemeiner Fuß	125, 1
Bau-Fuß	125, 3
London, Fuß (foot)	135, 1
Meklenburg, Fuß	129
München (Bayer.) Fuß	129, 38
Paris, Meter	443, 295936
Rheinländischer Fuß	139, 18
Rom, alter Fuß	130, 7
neuer Fuß (Palmo dei Architetti)	99
Schweden, Fuß	131, 587
Stuttgart, Fuß	127
Turin, Fuß (piè di liprando)	227, 7
Warschau, Fuß	132
Wien, Fuß	140, 13

Bemerkungen.

1) Im gewöhnlichen Verkehr ist der Berliner (Brandenburger) Fuß dem Rheinländischen gleich zu achten.

2) Die Ruthe ist an verschiedenen Orten sehr verschieden gebildet. Im Preußischen machen 12 Fuß eine Ruthe, welche dann von den Feldmessern in 10 Feldfuße getheilt wird. Auch in Ansbach, Dänemark, Leiden, machen 12 Fuße (bezüglich derselben Orte) eine Ruthe, so wie auch die Rheinl. Ruthe aus 12 (rhein.) Fußen besteht. Dagegen bilden in Cöln, Hamburg, Kalenberg Mecklenburg, Nürnberg, Pommern (alte Ruthe) und Schweden, 16 der Fuße der bezüglichen Orte eine Ruthe. Ferner haben die Culmische, Danziger, Lithauische, Oletzkoische, die Polnische, die Preuß. Deichgräber-Ruthe, endlich die Schlesische Ruthe nur 15 der Fuße bezüglich derselben Orte. Endlich giebt es an manchen Orten noch Ruthen zu 10 Fuß, an andern Orten noch deren zu 14 Fuß.

3) Der Fuß wird aber fast überall und allgemein in 12 Zolle, der Zoll wieder in 12 Linien getheilt; im entgegengesetzten Falle, wo zehntheilige Eintheilung vorausgesetzt ist, muß solches als eine Ausnahme besonders bemerklich gemacht werden.

4) Die vorstehende Tabelle giebt augenblicklich die Vergleichung zweier beliebigen Fuße, z. B. des Bayerischen und des Berliner (Brandenburger) Fußes mit einander. Die Tabelle zeigt nämlich, daß

1 Bayerischer Fuß hat 129,38 Par. Linien,
1 Berliner Fuß hat 139,13 Par. Linien;

also machen umgekehrt

139,13 Bayerische Fuß soviel als
129,38 Berliner;

weil beide Mengen gleichviele Pariser Linien enthalten; oder es ist 139,13 Bayerische Fuße = 129,38 Berliner, d. h. nahehin 14 Bayer. = 13 Berlin., näher 43 Bayer. = 40 Berliner, noch näher 57 Bayer. = 53 Berliner.

5) Wenn aber 13 Berlin. Fuße soviel machen als 14 Bayer. Fuße, so gilt dies nur von den Längen=Fußen, nicht aber von den Quadrat=Fußen, und noch weniger von den Kubik=Fußen. Im Gegentheil wenn

13 Berl. Fuße = 14 Bayer. sind,

so machen dann

13.13 oder 169 Berlin. Quadrat=Fuße soviel als
14.14 oder 196 Bayer. Quadrat=Fuße

und

13.13.13 oder 2197 Berlin. Kubik=Fuße soviel als
14.14.14 oder 2744 Bayer. Kubik=Fuße,

so daß also

5 Berlin.=Kubik=Fuße schon mehr als
6 Bayer. Kubik=Fuße machen.

Oder

1000 Berl. (Längen=) Fuße = 1075 Bayer. Längen=Fuße,
1000 Berl. Quadr.=Fuße = 1155,7 Bayer. Quadr.=Fuße,
1000 Berl. Kubik=Fuße = 1242,3 Bayer. Kubik=Fuße.

6) Man merke sich also:

A) Will man wissen, wieviele Pariser Quadrat=Linien irgend ein Quadrat=Fuß hat, so muß man die Zahl in der Tabelle mit sich selber multipliciren.

B) Will man wissen, wieviele Pariser Kubik=Linien irgend ein Kubik=Fuß hat, so muß man die Zahl der Linien in der Tafel 3 mal mit sich multipliciren.

C) Diese Zahlen der Pariser Quadrat= oder Kubik=Linien sind dann die Verhältniß=Zahlen in denen die verschiedenen Quadrat=Fuße, und die verschiedenen Kubik=Fuße zu einander stehen.

D) Während endlich (irgend) ein Fuß 12 Zolle hat, hat ein Quadrat=Fuß 12.12 oder 144 Quadratzolle, und ein Kubik=Fuß 12.12.12 oder 1728 Kubikzolle.

Vergleichung einiger Ellen=Maaße mit einander.

Namen der Ellen.	Pariser Linien.
Amsterdam, Elle	305, 39
Antwerpen, große	307, 8
kleine	303, 4
Bayerische (München) Elle	369, 27
Berlin,	296
Brabanter, in Frankfurt am Main	309, 95
in Hamburg	306, 5
in Amsterdam	307, 7
Braunschweig	253
Brüssel, große	307, 8
— — kleine	303, 4
Dänemark	278, 26
Dresden	250, 9
Frankfurt am Main	242, 61
Hamburg	254
Leipzig	250, 58
London, Yard von 3 Fuß	405, 39
Leinwand=Elle	506, 9
in Boy und Frieß, Godes	311
Nürnberg	292, 4
Paris, franz. Elle, Aune	526, 6
Seidenhändler=Stäbe	527, 5
Tuchhändler=Stäbe	526, 4
Leinwandhändler=Stäbe	524
Rußland, Arschine	318
Schlesien (vorm.) Elle	255, 3
Schweden	263
Spanien, Vara	369, 864
Warschau	264
Wien	344, 5

Einiges über Flächen- (Felder-) Maaße.

In Bayern hat das Juchert 400 bayer. □ Ruthen; die □ Ruthe zu 144 (bayer.) □ Fuße gerechnet.

Im Preußischen Staate wird der (Magdeburger) Morgen zu 180 (Brandenburger, Berliner) Quadrat-Ruthen, à 144 (Berliner) □ Fuße gerechnet. Eine Hufe hat 30 solche Morgen.

In Frankreich hat man den Are zu 100 □ Metre, und dann

1 Myriare = 1000000 □ Metre = 1 □ Kilomètre
1 Kilare = 100000 □ Metre = 10 □ Hectomètre
1 Hectare = 10000 □ Metre = 1 □ Hectomètre
1 Décare = 1000 □ Metre = 10 □ Décamètre
1 Are = 100 □ Metre = 1 □ Décamètre
1 Déciare = 10 □ Metre
1 Centiare = 1 □ Metre
1 Milliare = $\frac{1}{10}$ □ Metre
1 □ Metre = 9,476817461 Pariser □ Fuß
1 Pariser □ Fuß = 1,071231695 Berliner □ Fuß (Werk)
= 0,743910899 Berliner □ Feld-Fuß
1 Are = 7,049907 Brandenburger □ Ruthen
1 Magdeburger Morgen = 25,532249 Aren.
Auch sind
100000 Magdeburger Morgen = 52038 bayer. Juchert.

Einiges über Körper-Maaße.

Hat die Ruthe 12 Fuß, so hat die Kubikruthe 12.12.12 d. h. 1728 Kubikfuß. Eine Schachtruthe hat 12.12 oder 144 Kubikfuße.

In Frankreich heißt der Kubikmetre, wenn er zum Messen fester Körper gebraucht wird, Stère. Zur Ausmessung der Hohlgemäße ist der Litre = $\frac{1}{1000}$ Stère. Es ist aber

1 Décastère = 10 Stère
1 Décistère = $\frac{1}{10}$ Stère
1 Kilolitre = 1 Stère

1 Hectolitre = $\frac{1}{10}$ Stère = 100 kub. Décimètre
1 Décalitre = $\frac{1}{100}$ Stère = 10 kub. Décimètre
1 Litre = $\frac{1}{1000}$ Stère = 1 kub. Décimètre
1 Décilitre = $\frac{1}{10000}$ Stère = 100 kub. Centimètre
1 kub. Mètre oder Stère = 29,173851852 Par. Kubik=Fuß
= 32,345874278 Brdbg. K. = Fuß.

Im Preußischen bedient man sich zur Ausmessung der Flüßigkeiten des Quarts zu 59 Pariser Kubik = Zoll.

Im Bayerischen hat man das Maaß zu 53,64 Pariser Kubik=Zolle, so daß man hat

10 Berl. Quart = 11 Bayer. Maaß.

Ferner machen

100 Berliner Brennholz = Klafter soviel als 106 Bayer.
1 Berl. Brennholz=Klafter = 108 Brandenb. Kubik=Fuß
1 Berl. Haufen = $4\frac{1}{2}$ Berl. Klaftern = 486 Brdbg. Kub.=Fuß
1 Achtel = $3\frac{1}{3}$ Berl. Klafter = 360 Brdbg. Kub.=Fuß.

Tafel mehrerer Getreide = Maaße.

Namen der Oerter und Länder.	Körperlicher Inhalt folgender Getreide = Maaße: Namen derselben.	Französische Kubik = Zolle.
Amsterdam	Schepel	1400
Ansbach	Maß	1283
Aschaffenburg	Malter	6596
Augsburg	Schaff	11472
— —	Metze	1434
Baden	Scheffel, glatte	6368
—	— rauhe Frucht	7960
Basel	Sack	6504
Bayern	Schaff, glatte	11234
—	— rauhe Frucht	13106
Bayreuth	Simra, glatte	24322
—	— rauhe Frucht	29697

Namen der Oerter und Länder.	Körperlicher Inhalt folgender Getreide-Maaße	
	Namen derselben.	Französische Kubik-Zolle.
Berlin	Scheffel	2758
Bern	Mut	8476
Böhmen, s. Prag		
Botzen und Tyrol	Korn-Stär	1541
Braunschweig	Himten	1560
Bremen	Scheffel	3585
Breslau	Scheffel	3730
Brüssel	Sack	5879
Cassel	Viertel	7196
Cleve	Malter	5411
Coblenz	Malter	8048
Coburg	Simmer	4200
Cölln	Malter	8172
Dänemark	Tonne	7013
Darmstadt	Malter	5411
Danzig	Scheffel	2761
Dresden	Scheffel	5398
Eckernforde (Schleswig)	Tonne	7165
Eisenach	Viertel	4912
Emden	Tonne	9638
Erfurt	Scheffel	2838
Insel Femern	Scheffel	2026
Flandern	Rosier	4819
— — auch	—	5670
Franken	Simmer	4200
Frankfurt am Main	Malter	5600
Fulda	Malter	8506
Gotha	Scheffel	4454
Hamburg	Himten	1328
— —	für Gerste u. Hafer	1371
Hannover	Himten	1560
Hildesheim	Himten	1307

Namen der Oerter und Länder.	Körperlicher Inhalt folgender Getreide=Maaße	
	Namen derselben.	Französische Kubik=Zolle.
Holstein	Tonne Königl.	6250
Irland	Quarter	14408
Kiel	Tonne	5976
Königsberg	neuer Scheffel	2673
Köthen (Anh.)	Scheffel	2703
Krakau	Korsec	6054
London	Buschel	1780
Lübeck	Scheffel Waizen, Roggen	1684
—	Scheffel Hafer	1964
Mähren	alte Metze	3560
Mannheim	Malter	5570
Mecklenburg=Schwerin	Scheffel	2013
Gewöhnliches Maas ist der Rostocker	Scheffel	1789
Memel	alter Scheffel	2440
Nordhausen	Scheffel	2235
Nürnberg	Metze	1100
—	Simra	17600
Oldenburg	Tonne	8985
Osnabrück	Scheffel	1447
Ostfriesland	Tonne	10388
Paris	Hectolitre	5046
—	Decalitre	504, 6
—	Boisseau	644
—	Setier	7736
Prag	Strich	4718
—	Metze	3101
Ravensburg	Streif oder Scheffel	2096
Regensburg	Metze	1628
Reval	Last	147950
—	Tonne	6164

Namen der Oerter und Länder.	Körperlicher Inhalt folgender Getreide-Maaße	
	Namen derselben.	Französische Kubik-Zolle.
Riga	Last: Weiz. Rogg. Gersten	161400
—	Last: Malz, Hafer, Erbse	201750
Rußland	Tschetwerth	9658
—	Tschetwerik	1207
Schlesien, Oesterreich	Scheffel	3850
Schleswig	Tonne	7038
—	Heidscheffel	5260
Schottland	Firlot: Weizen	1817
—	Firlot: Gerst. Haf.	2651
Schweden	Tonne	7386
Stettin	vormal. Scheffel	2485
Stralsund	Scheffel	1964
Thorn	vormal. Scheffel	2761
Ulm	Imy	11548
—	kurzer Imy (Scheff.)	8754
Weimar	Scheffel	4490
Wien	Metze	3100
Wismar	Scheffel	1930
Worms	Malter Roggen	5643
—	— Hafer	7246
Würtemberg	Scheffel	8396
Zweibrücken	Malter	10175

Bemerkungen.

Bei dem Gebrauch dieser Tafel der Vergleichung der Getreide-Maaße mag man nachstehende Punkte noch beachten:

1) An vielen Orten sind neue gesetzliche Maaße im Verkehr, aber unter den alten Namen (der früher gebrauchten Gemäße). S. z. B. ist das Bayerische Schaff (Schaf-

fel, Schäffel) gesetzlich in 6 Metzen, die Metze aber in Viertel, Sechzentheil und Vier und Sechzigstel getheilt. Die halbe Bayer. Metze hat daher nach der vorstehenden Tabelle glatte Frucht 936 franz. Kubik-Zolle (rauhe Frucht dagegen 1092 franz. Kubik-Zolle), während die Nürnberger ganze Metze 1100 franz. Kubik-Zoll hat. Obgleich nun in Nürnberg, wie in allen Bayerischen Provinzen diesseits des Rheins, das Münchener oder Bayerische Maaß gesetzlich eingeführt worden und im Verkehr angenommen ist, so wird doch die Bayerische halbe Metze (glatte Frucht), nach welcher wirklich gekauft und verkauft wird, in Nürnberg und der Umgegend, vom Volke immer ein ganzer (Nürnberger) Metze genannt, während eben so die Unterabtheilungen der Bayerischen Metze im gewöhnlichen Verkehr die alten Namen der wenig davon verschiedenen Nürnberger Maaße erhalten haben.

2) Die vorstehende Tabelle liefert sogleich die Vergleichung zweier beliebigen Gemäße unter sich, z. B. das Berliner Scheffel (der in der ganzen Preuß. Monarchie als gesetzliches Maaß eingeführt ist) mit dem Münchener oder Bayerischem Schaff (Schäffel). Die Tabelle zeigt nämlich, daß

1 Berlin. Scheffel 2758 franz. Kubik-Zoll,

1 Bayer. Schäffel aber 11234 franz. Kubik-Zoll

hat; also machen

11234 Berlin. Scheffel soviel als 2758 Bayer.,

weil jede dieser beiden Mengen soviel als 11234 mal 2758 franz. Kubik-Zolle hat.

3) Man muß sich ferner nicht durch die Gleichnamigkeit der Unter-Benennungen täuschen lassen. So z. B. wird der Bayer. Schäffel in sechs (6) Bayer. Metzen eingetheilt, während der Berliner Scheffel in sechzehn (16) Metzen getheilt wird. Daher kommt es, daß 1 Bayerische Metze fast $\frac{2}{3}$ Berliner Scheffel ist; denn es hat

1 Bayer. Metze 1872 franz. Kubik-Zolle,

1 Berlin. Scheffel 2758 fr. Kubik-Zolle,

so daß wo es nicht auf zu große Genauigkeit ankommt, aber schon ziemlich genau

3 Bayer. (ganze) Metzen mit 2 Berlin. Scheffeln oder 1 Bayer. Schäffel mit 4 Berliner Scheffeln übereinkommt. Es ist also

1 Berlin. Scheffel nahehin $1\frac{1}{2}$ Bayer. Metze und

1 Berlin. Metze ohngefähr $\frac{3}{32}$ Bayer. Metze.

Einiges über Gewichte.

Fast überall wird das Pfund (℔) in 32 Lothe, das Loth wieder in 4 Quentchen getheilt. Das Pfund selber aber ist in verschiedenen Ländern verschieden. Eben, so ist es mit dem Centner; in einigen Ländern, wie z. B. in Baden, Bayern, Braunschweig, Hannover, Hessen (Darmstadt), Oesterreich, Polen, hat der Ctr. 100 ℔, in andern dagegen, z. B. Preußen, Sachsen, 110 ℔, und in noch andern Ländern 104, 106, 108 und 112, sogar 116 ℔, wie in Bremen.

In den sämmtlichen Zollvereins-Staaten kommt seit dem 1. Januar 1840 bei dem Ein-, Aus- und Durchgangs-Zoll das Zollgewicht in Anwendung. Dieser Zoll-Centner (welcher genau ein halbes franz. Kilogramm ist) wird in 100 (Zoll-) Pfunde; das Pfund (℔) aber nur in 30 Lothe getheilt, so daß

1 Zoll-Centner = 100 Zoll-Pfde = 3000 Zoll-Lothe hat. — Im nachstehenden ersieht man die Verhältnisse der Gewichte der einzelnen Zollvereins-Staaten (und noch einiger nicht dazu gehöriger) zu diesem Zoll-Gewicht, so daß man daraus wieder das Verhältniß der Gewichte der einzelnen Staaten unter sich leicht abnehmen kann.

Baden, Großherzogthum.

1 Ctr. = 10 Stein = 100 ℔.

1 ℔ = 10 Zehnling = 100 Zentaß.

Im gewöhnlichen Verkehr wird das ℔ in 32 Lothe und das Loth in 4 Quentchen getheilt.

Der Centner, wie das Pfund stimmen genau mit dem Zoll-Centner und Zoll-Pfund überein; aber 1 Loth (bad.) = $\frac{15}{16}$ Zoll-Loth.

Bayern.

1 Ctr. = 100 ℔ à 32 Loth à 4 Quent.
100 bayer. Ctr. = 112 Ctr. Zoll-Gewicht.
100 bayer. ℔ = 112 Zoll-Pfund.

In Rheinbayern (Rheinkreise) bestehen die neuen franz. Gewichte; außer diesen aber auch noch das in Frankreich abgeschaffte

Quintal = 100 Kilogrammes,

und auch das Pfund, welches dem Zoll-Pfunde gleich ist.

Bremen. (Handelsgewicht.)

1 Ctr. = 116 ℔; 1 ℔ = 32 Lothe; 1 Loth = 4 Quent.
1 Pfundschwer (oder ein Landfracht-Centner) hat 308 ℔.
Die Schiffslast wird zu 4000 ℔ gerechnet.

Es sind

1000000 Br. Ctr.	=	1156520 Zoll-Ctr.
	=	1123965 Preuß. Ctr.
1000000 Br. ℔	=	997000 Zoll-Pfund.
	=	1065829 Preuß. Pfund.
1000000 Zoll-℔	=	1003009 Bremer Pfund.
1000000 Preuß. ℔	=	938237 Bremer Pfund.

England. (Handelsgewicht. Avoir du poids.)

1 Ton = 20 Hundred weight (Centner).
1 Hundr. wght. = 4 Quarters = 112 Pounds.
1 Pound = 16 Ounces; 1 Ounce = 16 Drams.

Auch kommen im Handel vor:

1 Last = 12 Sacks = 24 Weys; 1 Wey = 13 Stones.
1 Tod = 2 Stones; 1 Stone = 14 Pounds = $\frac{1}{8}$ Ctr.

Das Avoir du poids ℔ = $\frac{1000}{5760}$ des Troy-℔, während das letztere in 5760 Grains getheilt ist, und als Gold-, Silber- und Apotheker-Gewicht angewendet wird, dabei 373,246 franz. Grammen hat.

Es sind

1000000 Hundred weight = 1016059 Zoll-Ctr.
= 987458 Preuß. Ctr.
1000000 Pounds (Pfund) = 907195 Zoll-Pfund.
= 969824 Preuß. Pfund.
1000000 Zoll-Pfund = 1102299 Pounds.
1000000 Preuß. Pfd. = 1031114 Pounds.

Frankfurt am Main. (Handelsgewicht.)

1 Ctr. = 100 schwere ℔ = 108 leichte ℔.

Das schwere Pfund (ein bloßes Rechnungs-Gewicht) wird in Halbe, Viertel und Achtel, das leichte in 32 Loth à 4 Quentchen getheilt.

1000000 Frankf. Ctr. = 1010694 Zoll-Ctr.
= 982244 Preuß. Ctr.
1 ℔ schwer = 1 ℔ 0,32 Loth Zoll-Gewicht.
= 1 ℔ 2,57 Loth Preuß.
1 ℔ leicht = 28,07 Loth Zoll-Gewicht.
= 1 ℔ 0,01 Loth Preuß.

Frankreich.

1 Kilogramme = 10 Hectogr. = 100 Décagr. = 1000 Grammes.
1 Hectogr. = 10 Décagr = 100 Grammes.
1 Décagr. = 10 Grammes.
1 Gramme = 10 Décigrammes = 100 Centigr. = 1000 Miligr.
1 Kilogramme = 2 Zoll-Pfund.

Die Königreiche der Niederlande und Belgien haben eben dasselbe Gewicht, aber mit folgenden Benennungen:

	in den Niederlanden	in Belgien
Das Kilogramm heißt	Pond	Livre
„ Hektogramm „	Ons	Once
„ Dekagramm „	Lood	Gros
„ Gramm „	Wigtje	Esterlin
„ Decigramm „	Korrel	Grain.

Hamburg.

1 Ctr. = 112 ℔; 1 ℔ = 32 Lothe; 1 Loth = 4 Quent.

Das Schiffs-Pfund hat 20 Lis-Pfund oder $2\frac{1}{2}$ Ctr. 1 Lis-Pfund = 14 ℔.

Das Schiffs-Pfund zur Fuhre (zu Lande) hat auch 20 Lis-Pfund, letztere aber zu 16 ℔, so daß ein solches Schiffs-Pfund = $2\frac{6}{7}$ Ctr. ist.

Es sind

1000000	Hamb. Ctr.	=	1084541 Zoll-Ctr.
		=	1054012 Preuß. Ctr.
1000000	Hamb. Pfd.	=	968340 Zoll-Pfd.
		=	$1035190\frac{1}{2}$ Preuß. Pfd.
1000000	Zoll-Pfd.	=	1032695 Hamb. Pfd.
1000000	Preuß. Ctr.	=	948756 Hamb. Ctr.
1000000	Preuß. Pfd.	=	966006 Hamb. Pfd.

Hannover und Braunschweig.

Die Schiffslast hat 4000 ℔; der Ctr. hat 100 ℔ à 32 Loth à 4 Quentchen. Das Pfd. ist dem Preuß. Pfde gleich, so daß

11 Hannov. Ctr. = 10 Preuß. Ctr.

machen.

Hessen, Churfürstenthum. (Kasseler Gewicht.)

1 Ctr. = 108 ℔ Schwergewicht (bei dem Großhandel).
1 Ctr. = 108 ℔ Leichtgewicht (bei dem Kleinhandel).

Das ℔ hat 32 Lothe.

1000000	schwere ℔	=	968480 Zoll-Pfund.
		=	1035340 Preuß. Pfund.
1000000	leichte ℔	=	935624 Zoll-Pfund.
		=	1000216 Preuß. Pfund.

(Das Gewicht für die indirekten Steuern, außer dem Zoll, ist genau das Preußische.)

Hessen, Großherzogthum.

1 Ctr. = 100 ℔; 1 ℔ = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quent., außerdem ist der Ctr. und das ℔ genau mit dem Zollgewicht übereinstimmend.

Nassau.

Der Wiesbadener Ctr. hat 106 Pfd. à 32 Loth.

1000000 Wiesb. Pfd. = 941372 Zoll-Pfund.
= 1006361 Preuß. Pfund.

Polen.

1 Ctr. = 4 Kamieni (Stein) = 100 ℔
1 ℔ = 16 Unzen = 32 Loth à 4 Drachmen.

1000000 Poln. ℔ = 811008 Zoll-Pfund.
= 866997 Preuß. Pfund.

Preußen.

1 Ctr. = 110 Pfd.; 1 Pfd. = 32 Lothe; 1 Loth = 4 Quent.

10000000 Preuß. Ctr. = 10289642 Zoll-Ctr.
10000000 Preuß. ℔ = 9354220 Zoll-Pfund.

1 ℔ Preuß. = 467, 711012733 franz. Gramme.
1 Zoll-Ctr. = 106 ℔ 28,9 Loth Preuß.
1 Zoll-Pfund = 1 ℔ 2,2 Loth Preuß.
1 Zoll-Loth = 1,1 Preuß. Loth.

Rußland.

Das Berkowetz oder Schiffs-Pfund hat 10 Pud; 1 Pud = 40 ℔; 1 ℔ = 32 Loth; 1 Loth = 3 Solotnik.

1000000 Ruß. ℔ = 819033 Zoll-Pfund.
= 875576 Preuß. Pfund.

1 Pud = 32 Pfd. 22,84 Loth Zoll-Gewicht.
= 35 Pfd. 0,74 Loth Preuß. Gewicht.

Sachsen. (Leipziger Handelsgewicht.)

Eintheilung wie in Preußen.

1000000 Sächs. Ctr. = 1027040 Zoll-Ctr.
= 998130 Preuß. Ctr.
1000000 Sächs. ℔ = 933673 Zoll-Pfund.
= 998130 Preuß. Pfund.
1000000 Zoll-Ctr. = 973672 Sächs. Ctr.
1000000 Zoll-Pfd. = 1071039 Sächs. Pfund.

534 Preuß. Ctr. sehr nahe = 535 Sächsische.

Schweden.

Das Schiffs-Pfund Viktualien-Gewicht hat 20 Lis-Pfund oder 400 Schal-Pfund à 32 Lothe à 4 Quentchen.

1000000 Schal-Pfund = 850679 Zoll-Pfund.
1 Schiffs-Pfund = 3 Ctr. 40 ℔ 8,15 Loth Zoll-Gewicht.
= 3 Ctr. 33 ℔ 24,41 Loth Preuß.

Das Schiffs-Pfund Eisengewicht hat 20 Lis-Pfund oder 400 Pfd.; aber 5 solche Pfd. sind 4 Schal-Pfunde.

Wien.

1 Ctr. = 100 Pfd.; 1 Pfd. = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quent.

1000000 W. Ctr. = 1120024 Zoll-Ctr.
= 1088497 Preuß. Ctr.
1000000 W. Pfd. = 1120024 Zoll-Pfund.
= 1197346 Preuß. Pfund.
1000000 Zoll-Ctr. (Pfd.) = 892838 W. Ctr. (Pfd.)
1000000 Preuß. Ctr. = 918698 W. Ctr.
1000000 Preuß. Pfd = 835180 W. Pfd.

Würtemberg.

1 Ctr. = 104 Pfd. à 32 Loth à 4 Quentchen. $\frac{1}{100}$ Ctr. heißt ein schweres Pfund und ist blos ein Rechnungs-Pfund.

1000000 (leichte) Pfd. = 935456 Zoll-Pfund.
= 1000036 Preuß. Pfund.
1 Würtemb. Ctr. = 97 ℔ 8,62 Loth Zoll-Gewicht.
= 104 ℔ 0,12 Loth Preuß.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Kurzes, gründliches und leicht faßliches Rechenbuch brauchbar in allen Bü
rger-Gewerbs- und Militar-Schulen

Erlangen 1845

Math.p. 382 fn
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082511-5